

S c h l u ß b e r i c h t

zum Forschungsvorhaben

"Stabilitätsnachweise von Rahmensystemen im  
Stahlbetonbau"

(AIF - Nr. 1388)

vorgelegt von: Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina  
Dr.-Ing. Béla Jankó †

B I B L I O T H E K  
Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz  
der Technischen Universität Braunschweig  
Beethovenstraße 52  
D-3300 Braunschweig

Der Schlußbericht besteht aus drei Teilen, die jeweils  
mit eigenen Inhaltsverzeichnissen versehen und deren  
Seiten getrennt durchnummeriert sind.

Braunschweig, im Oktober 1974

## V o r w o r t

Im Jahre 1966 wurde dem Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau durch die AIF (Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen e.V.) auf Vermittlung des DBV (Deutscher Beton Verein e. V.) die Durchführung von Untersuchungen über

Stabilitätsnachweise von Rahmensystemen  
im Stahlbetonbau

übertragen.

Mit dem vorliegenden Bericht legt das Institut Rechenschaft ab über die Verwendung der zur Verfügung gestellten Mittel. Die Ergebnisse dieser Arbeiten wurden der AIF in drei Teilberichten vorgelegt. Die Ergebnisse dieses dritten Teiles wurden in einer Ende 1971 bei der Fakultät für Bauwesen der Technischen Universität Braunschweig eingereichten Dissertation Herrn Dr.-Ing. Belá J a n k ó s mit verarbeitet; diese Dissertation ist im übrigen auch als Heft 21 der Schriftenreihe des Instituts für Baustoffkunde und Stahlbetonbau erschienen.

Weil der von der AIF zur Verfügung gestellte Betrag eine weitere Ausdehnung unserer Untersuchungen über das Tragverhalten verschieblicher Stahlbetonrahmen nicht zuließ, wurde die DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) gebeten, eine in sich abgeschlossene Studie über sicherheitstheoretische und bemessungstechnische Fragen zu finanzieren. Diese Ergebnisse wurden zusammen mit einer umfassenden Darstellung der im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau in den letzten Jahren durchgeführten Arbeiten an Stabilitätsproblemen des Stahlbetonbaues in den dritten Teil des hier vorliegenden Forschungsberichtes mit aufgenommen, um solcherart einen zusammenfassenden Überblick zu bieten.

Ursprünglich war beabsichtigt, nur die Ergebnisse der durch die AIF geförderten Arbeiten in einem einzigen zusammenfassenden Schlußbericht zu veröffentlichen. Durch den Tod meines Mitarbeiters Dr.-Ing. B. J a n k ó , der hauptsächlich mit diesen Untersuchungen betraut war, wurde dieses Vorhaben vereitelt. Darüber hinaus erscheint es sinnvoller, dem interessierten Leser alle bei uns auf diesem Gebiet erzielten Ergebnisse in einer Veröffentlichung an die Hand zu geben unabhängig davon, von welcher Seite die Arbeiten finanziert wurden.

Aus diesen Gründen wird der Schlußbericht in der vorliegenden dreiteiligen Fassung veröffentlicht, wobei die ersten beiden Teile nur Ergebnisse der seitens der AIF geförderten Arbeiten darstellen, während der dritte Teil, - der für sich allein schon einen umfassenden Überblick gibt, - auch solche Ergebnisse enthält, die von anderer Seite gefördert wurden.

Der AIF, dem DBV und der DFG sind wir für Förderung und verständnisvolles Entgegenkommen ebenso wie Herrn Dr.-Ing. B. J a n k ó für seine maßgebliche Mitarbeit zu Dank verpflichtet.

Karl Kordina

## **1. Teil**



## Inhaltsverzeichnis

### 1. Einleitung

#### 1.1 Allgemeines

#### 1.2 Problemstellung

#### 1.3 Geschichtlicher Überblick

### 2. Entwicklung eines Berechnungsverfahrens zur Ermittlung der Traglast zusammengesetzter Systeme

#### 2.1 Annahmen

#### 2.2 Theoretische Grundlagen des Rechenverfahrens

#### 2.3 Beschreibung des Rechenprogramms

#### 2.4 Kritische Betrachtungen

### 3. Nachrechnung von Rahmenversuchen

#### 3.1 Beschreibung der Versuche

#### 3.2 Nachrechnung der Versuche

##### 3.2.1 Rechenannahmen

##### 3.2.2 Vergleich der Traglasten

##### 3.2.3 Vergleich der Verformungen

#### 3.3 Kritik der Versuche

### 4. Kritische Betrachtungen, Ausblick

### 5. Zusammenfassung

Literaturangaben

- ( 1 ) Hognestad, E. "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members", University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station Bulletin Series Nr. 399, November 1951.
- ( 2 ) Rüsch, H. "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone", Heft 120 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1955, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.
- ( 3 ) Kordina, Karl u. Quast, Ulrich "Bemessungsverfahren für knickgefährdete Stahlbetondruckglieder". Mitteilung des Lehrstuhls für Massivbau an der TU Braunschweig, Leitung: o. Prof. Dr.-Ing. K Kordina.
- ( 4 ) Baker, A.L.L. "The ultimate load theory applied to the design of reinforced and prestressed concrete frames", London, Concrete Publications, 1956, Chapter IV.
- ( 5 ) Cranston, W.B. "A computer method for inelastic analysis of plane frames", Technical Report, Cement and Concrete Association, London, TRA/386, March 1965.
- ( 6 ) Bochmann, W. u. Röbert, S. "Knickversuche mit Zweigelenkrahmen aus Stahlbeton", Heft 171 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1965, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.
- ( 7 ) Breen, J.E. u. Ferguson, P.M. "The Restrained long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame", ACI Journal, Proceedings V. 61 Nr. 5, May 1964, pp. 563 - 585.
- ( 8 ) Breen, J.E. "The Restrained long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame", Dissertation, Austin, Texas, June 1962.
- ( 9 ) Livesley, R.K. "Analysis of rigid frames by an electronic digital computer", Engineering vol. 176, No. 4569 21.August 1953, pp. 230 - 233 No. 4570, 28.August 1953, pp. 277 - 278.
- (10) Livesley, R.K. "Automatic design of structural frames", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 9, No. 3, September 1956, pp. 257 - 278.
- (11) Rao, P.S. "Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte". Heft 177 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1967, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.

## 1. Einleitung

### 1.1 Allgemeines

Das Stabilitätsverhalten statisch bestimmt gelagerter Stahlbeton-Druckglieder kann auf Grund der veröffentlichten theoretischen und empirischen Ergebnisse als hinreichend geklärt angesehen werden. Stabilitätsuntersuchungen, die sich auf das Druckglied als integrierten Teil eines zusammengesetzten Systems beziehen, sind jedoch bis heute nur in vergleichsweise geringerem Umfang unternommen worden. Erst durch die Anwendung schneller, elektronischer Rechenautomaten konnte das Stabilitätsverhalten solcher Systeme rechnerisch genauer untersucht werden.

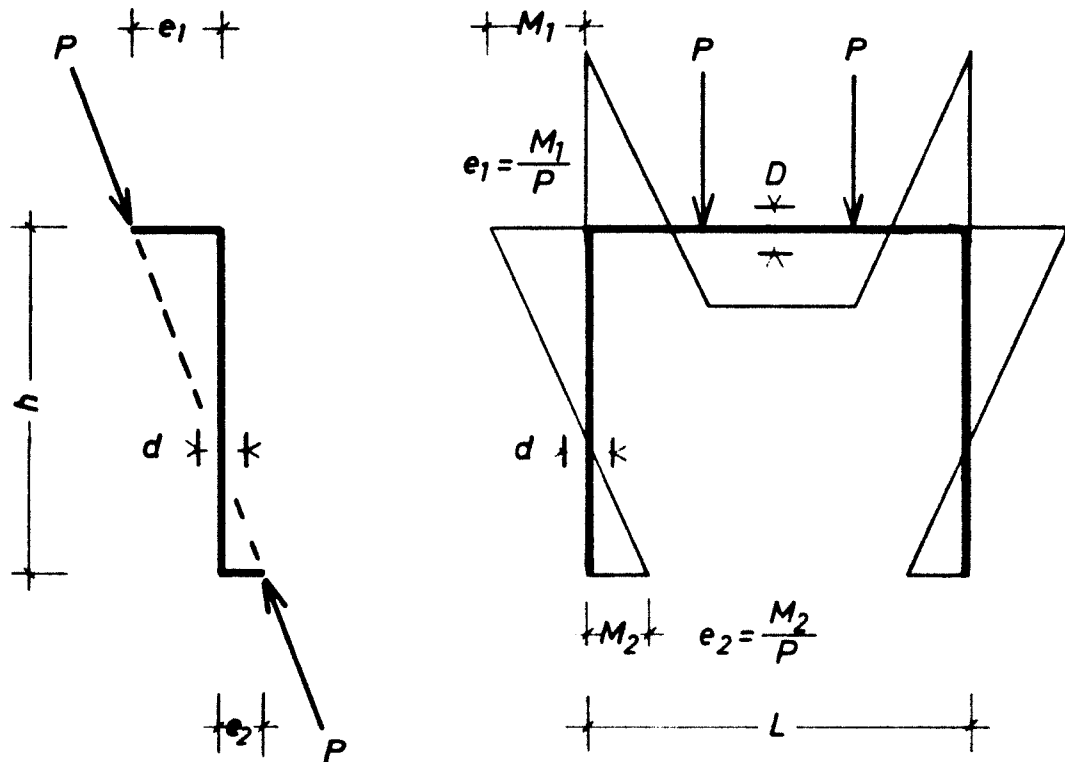
Für diese Untersuchungen besteht ein Bedürfnis aus folgenden Gründen:

1. Das Trag-und Verformungsverhalten zusammengesetzter ebener Systeme ist noch weitgehend ungeklärt, dessen Kenntnis jedoch für sichere und wirtschaftliche Konstruktionen unentbehrlich.
2. Die für die Bemessung solcher Systeme z.Zt. verwendeten Näherungsverfahren - z.B. das Ersatzstabverfahren - bedürfen einer Bestätigung oder gegebenenfalls einer Modifizierung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, ein Rechenverfahren zu entwickeln, mit dessen Hilfe das Trag-und Stabilitätsverhalten von Rahmensystemen exakt untersucht werden kann. Bei der Aufstellung solch eines Rechenprogramms werden Rechenannahmen getroffen, deren Richtigkeit an Versuchsergebnissen zu überprüfen ist. Hierfür werden die "Knickversuche mit Zweigelenrahmen aus Stahlbeton" (Heft 171 DAfStb) herangezogen.

### 1.2 Problemstellung

Der Stabilitätsnachweis von Stahlbetonrahmensystemen ist eine komplexe Aufgabe, die gegenüber dem gleichen Nachweis für statisch bestimmt gelagerte, ausmittig belastete Stützen



### Einzelstab

$h/d$  : bezogene Länge  
 $e/d$  : bezogene Exzentr.  
 $e_1/e_2$  : Form der Exzentr.  
 $\beta_s, \beta_w, \mu_1, \mu_1'$  : Baustoffkenn-  
 $\mu_1$  werte und Beweh-  
 rung der Stütze

### Rahmenstütze

$h/d$  :  
 $e/d$  :  
 $e_1/e_2$  :  
 $\beta_s, \beta_w, \mu_1, \mu_1'$  :  
 $L/D$  : bezogene Riegellänge  
 $\mu_2, \mu_2'$  : Riegelbewehrung  
 Art der Riegelbelastung

**Bild 1** Hauptparameter einer stat. bestimmt ge-  
lagerten Stütze und eines Rahmenstieles

größere Schwierigkeiten aufweist. Diese resultieren vor allem aus der größeren Anzahl von Variablen, die das Trag- und Stabilitätsverhalten des Systems beeinflussen.

Wie aus Bild 1 zu ersehen ist, kommen zu den beim Einzelstab maßgebenden Einflußgrößen - wie Last, Lastausmitte, Stablänge, Verlauf der Lastausmitte entlang der Stablänge, Querschnittsform, Betongüte, Stahlgüte, Bewehrungsanordnung - bei Rahmen noch die für die anschließenden Bauteile charakteristischen entsprechenden Größen und die geometrischen Parameter des Gesamtsystems hinzu.

Das Problem ist, ein Berechnungsverfahren zu entwickeln, das alle die erwähnten Variablen berücksichtigt und die Systemtraglast möglichst wirklichkeitsnahe bestimmt. Das Verfahren soll ferner so gestaltet sein, daß die Durchführung einer Traglastberechnung dem Simulieren eines Versuchs im Computer entspricht. Gelingt es, die Übereinstimmung so errechneter Traglasten mit Versuchsergebnissen zu beweisen, ist eine brauchbare und wirtschaftliche Möglichkeit für das Studium des Tragverhaltens zusammengesetzter ebener Rahmensysteme gefunden und können aufwendige Versuche eingespart werden. Wegen der großen Anzahl von Rechenoperationen kann das Problem allerdings nur mit Hilfe einer großen elektronischen Rechanlage gelöst werden.

Da es zunächst um die Überprüfung des Rechenverfahrens anhand durchgeführter Versuche geht, scheint eine auf breiter Basis geführte Untersuchung wenig zweckmäßig und wirtschaftlich zu sein. Es wird daher zwar ein allgemeines Rechenprogramm für mögliche Untersuchung mehrfeldriger und mehrstöckiger Systeme erstellt, aber im Rahmen dieses ersten Arbeitsabschnittes nur das einfachste-einfach statisch unbestimmte-System untersucht.

### 1.3 Geschichtlicher Überblick

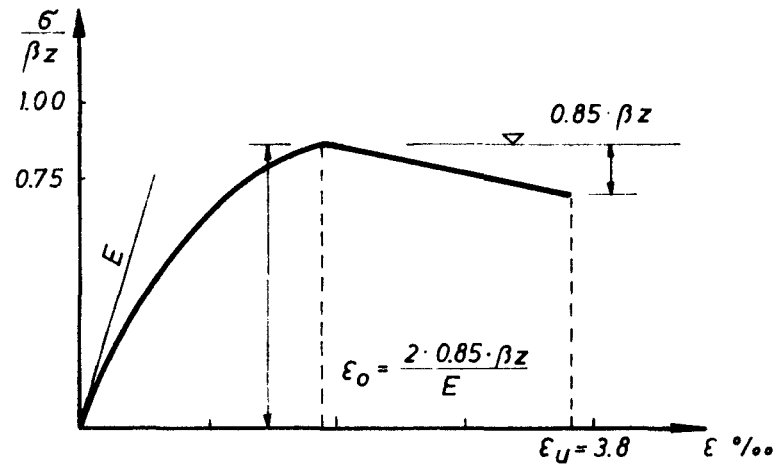
Im Laufe der letzten zwei Jahrzehnte sind mehrere Veröffentlichungen über Computer-Methoden zur Berechnung ebener

Rahmensysteme erschienen.

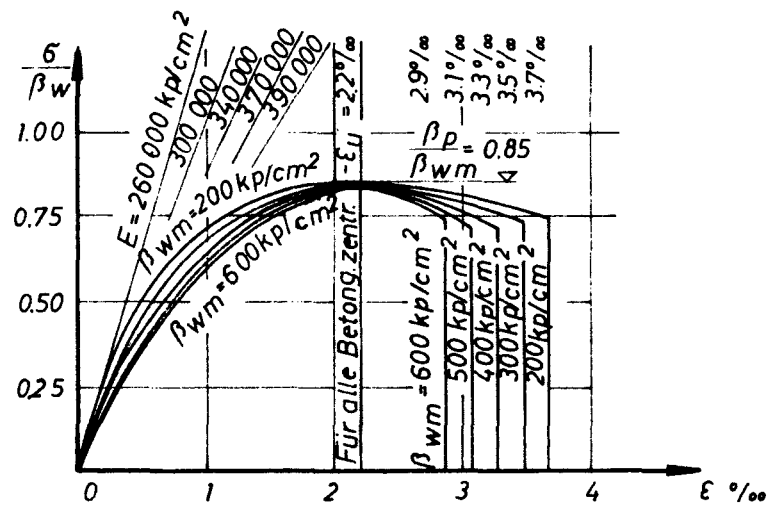
Zunächst ist die Arbeit von Livesley (9) zu nennen. Er hat eine Computer-Methode zur Bestimmung der Beanspruchungen ebener Rahmensysteme unter Voraussetzung des Hook'schen Gesetzes entwickelt. Das Verfahren berücksichtigt sowohl die von den Normalkräften hervorgerufenen Zusatzmomente nach Theorie II. Ordnung als auch die elastischen Längenänderungen der axial beanspruchten Konstruktionsglieder. Die Lösung erfolgt auf iterativem Wege: auf der Grundlage des Weggrößenverfahrens wird aus verträglichen Verformungszuständen derjenige errechnet, der auch die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. In der praktischen Durchführung der Berechnung muß man vorge-schätzte Normalkräfte vorgeben und den ersten Rechengang unter der Annahme durchführen, daß diese Werte richtig sind. Aus diesem Rechengang erhält man verbesserte Normalkräfte, die als Ausgangswerte für den nächsten Rechengang dienen. Nach einigen Wiederholungen endet die Berechnung mit Erfüllung auch der Gleichgewichtsbedingungen.

In einer weiteren Arbeit hat Livesley (10) die elastische Analyse von (9) erweitert. Unter Zugrundelegung eines ideal elasto-plastischen Materials wird die Berechnung unter ansteigender Belastung durchgeführt, wobei sich durch Bildung eines plastischen Gelenkes ein Grenzzustand ergibt. Die Belastung des hierdurch veränderten Systems kann weiter gesteigert werden, bis das Tragsystem durch Bildung einer hinreichenden Anzahl plastischer Gelenke in einen labilen Zustand übergeht.

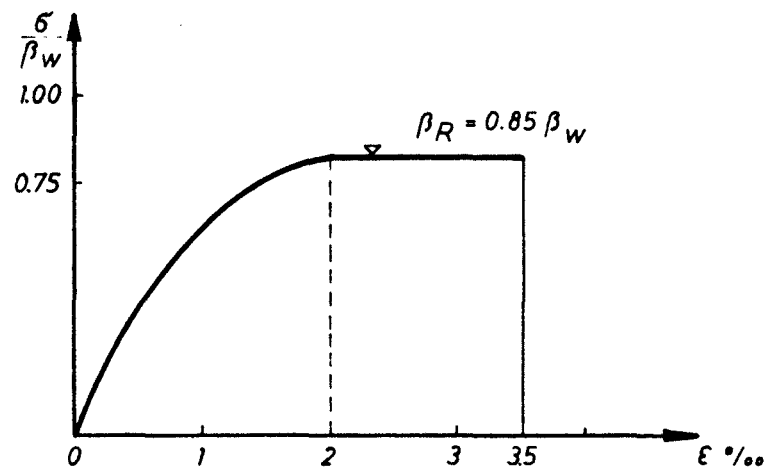
Die Methode von Baker (4) zielt auf die Bestimmung der Traglast von Stahlbeton-Rahmen ab. Die Definition der Traglast wird - ähnlich wie bei Livesley (10) - durch Bildung von plastischen Gelenken und damit Verwandlung des stabilen Systems in einen labilen Mechanismus angenommen. Diese Methode weist keine wesentlichen Unterschiede gegenüber Livesley auf; auch sie gibt das tatsächliche Formänderungsverhalten von Stahlbeton



a) nach Hognestad



b) nach Rüschi (DIN 1045 E)



c) Vorschlag von CEB

**Bild 2 Betonarbeitslinien nach verschiedenen Verfassern**

nur relativ grob angenähert wieder.

Eine wesentliche Entwicklung stellt das Rechenprogramm von Breen (8) dar, das für die Verformungsrechnung wirklichkeitsnahe Momenten-Krümmungsbeziehungen berücksichtigt. Für die Bestimmung dieser Momenten-Krümmungsbeziehungen wurde die Betonarbeitslinie nach Hognestad (1) (vergl. Bild 2a) und eine bilineare Stahlarbeitslinie verwendet. Das Rechenprogramm beschränkt sich auf einen speziellen Fall: Symmetrie, konstante Normalkraft, konstanter Querschnitt und Bewehrung.

Das von Cranston (5) entwickelte Verfahren ist allgemein gültig für Rahmensysteme und berücksichtigt auch weitgehend die Nichtlinearität des heterogenen Baustoffes. Die Momenten-Krümmungsbeziehungen werden für die einzelnen Querschnitte vorweg aus Versuchen abgeleitet und in Form von Polygonzügen für konstante Normalkräfte gespeichert. Mit Hilfe dieser M-K-Kurven werden unter steigender Belastung am verformten System die Gleichgewichtszustände bis zum Versagen des Systems errechnet.

Cranston's Untersuchung beschränkt sich auf überwiegend durch Biegung beanspruchte Systeme; es wurden keine Stabilitätsuntersuchungen vorgenommen.

## 2. Entwicklung eines Berechnungsverfahrens zur Ermittlung der Traglast zusammengesetzter Systeme

### 2.1 Annahmen

Die folgenden Untersuchungen beruhen im wesentlichen auf einer wirklichkeitsnahen Verformungsberechnung nach Theorie II. Ordnung. Der Berechnung liegen folgende Annahmen zugrunde:

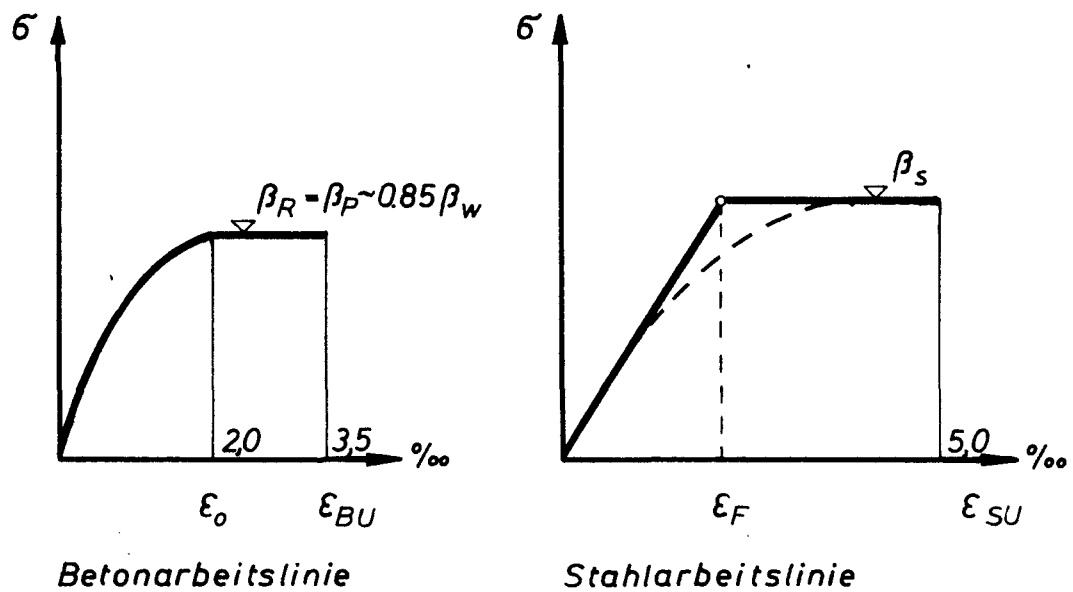
- die Traglast wird unter Kurzzeitbelastung gesucht. Zeitabhängige Einflüsse oder Ermüdungsbelastungen werden nicht berücksichtigt;
- es existiert eine allgemein gültige Zuordnung von Spannungen und Dehnungen bzw. Stauchungen für Beton und Stahl (Arbeitslinien).



Die rechnerische Erfassung des Spannungszustandes eines Stahlbetonquerschnittes kann auf verschiedenen Wegen erfolgen. So sind in (2) von der Betongüte abhängige, in Form eines Kurven-  
tafelwerkes dargestellte komplizierte Funktionen für die Beton-  
Arbeitslinie angegeben. Solche Grundlagen sind für die vorlie-  
gende Aufgabe wenig geeignet. Wesentlich günstiger ist die  
Verwendung einer Beton-Arbeitslinie in Form einfacher Funktionen.

So hat Hognestad (1) aufgrund umfangreicher Versuche an bewehrten  
Probekörpern unter Biegung und Längskraft sowie Kurzzeitbelastung  
eine Arbeitslinie des Betons nach Bild 2 a ermittelt. Diese  
Arbeitslinie wird heute in amerikanischen Untersuchungen fast  
ausschließlich verwendet. Die für die Verformungsrechnung von  
Rüsch entwickelten Arbeitslinien beruhen auf den Versuchser-  
gebnissen von (2) (s. Bild 2 b). Die in Bild 2 c dargestellte  
Arbeitslinie ist ein Vorschlag von Aas-Jakobsen, der auch den  
CEB-Vorschriften zugrunde gelegt wurde. Wie umfangreiche Ver-  
gleichsrechnungen zeigen (3), können die von Rüsch für Ver-  
formungsrechnungen vorgeschlagenen  $\sigma - \epsilon$  - Linien durch eine  
mittlere Arbeitslinie ersetzt werden, wenn der gesamte Festig-  
keitsbereich des Betons ausgenützt wird. Die Untersuchungen  
nach (3) an exzentrisch belasteten Stahlbetonstützen zeigen,  
daß die Verwendung einer vereinfachten Beton-Arbeitslinie gegen-  
über den genaueren nach Bild 2 b bei den Traglasten nur ge-  
ringe Abweichungen verursacht ( etwa 5 % im baupraktischen  
Bereich  $H/d = 10 \div 30$ ). Durch diese Vereinfachung wird außer-  
dem die Form der Beton-Arbeitslinie unabhängig von der Betongüte.  
Es ist zu erwarten, daß die Form der Arbeitslinie auch bei  
zusammengesetzten Systemen wenig Einfluß auf die Traglast hat.

Da die übrigen Rechenannahmen (Festigkeitswerte, Querschnitts-  
werte, Bewehrungslage) mit nicht geringeren Fehlern behaftet  
sind, wurde in der vorliegenden Arbeit eine vereinfachte  
mittlere Spannungs-Dehnungslinie des Betons in Form eines  
Parabel-Rechteck-Diagramms nach Bild 3 angenommen. Es ist aber  
grundsätzlich möglich, beliebige Spannungs-Dehnungs-Gesetze



**Legende :**

- $\beta_R$  = Rechenfestigkeit des Betons
- $\beta_P$  = Prismenfestigkeit des Betons
- $\beta_w$  = Würfelfestigkeit des Betons
- $\epsilon_o$  = Betonbruchdehnung für mittigen Druck
- $\epsilon_{BU}$  = Betonbruchdehnung für außermittigen Druck
- $\epsilon_F$  = Stahlzugdehnung bei Erreichen der Streckgrenze
- $\epsilon_{SU}$  = Stahlgrenzdehnung

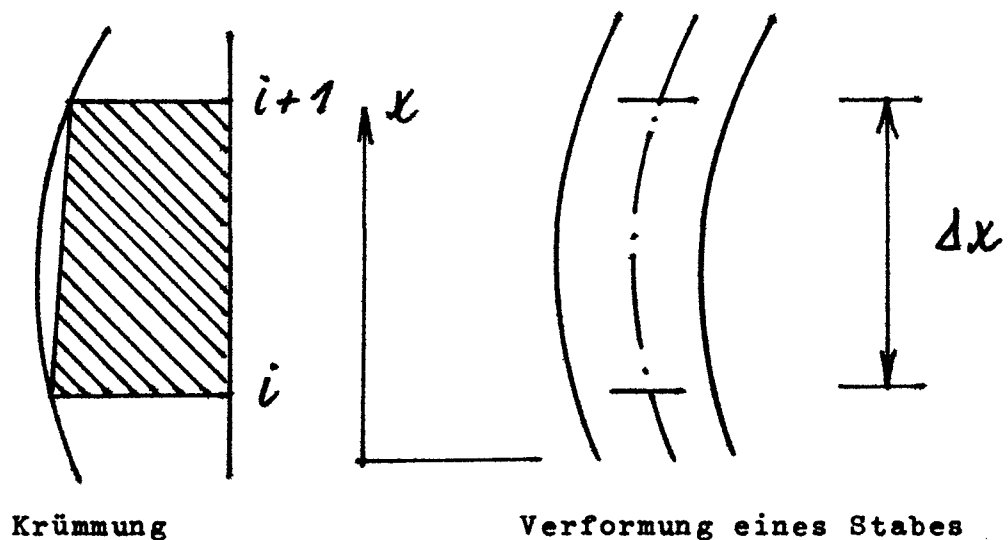
**Bild 3** Verwendete Spannungs-Dehnungs-  
diagramme für Stahl und Beton

zu berücksichtigen. Die Spannungs-Dehnungslinie des Stahles wird bilinear angenommen; sie ist in Bild 3 dargestellt.

Es wurden ferner folgende Annahmen getroffen:

- Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli-Hypothese)
- Polygonzug anstelle des stetigen Krümmungsverlaufs entlang einer Systemlinie.

Diese Näherung ergibt einen geringen Fehler, wie aus der folgenden Skizze ersichtlich ist:



Die Krümmung ist hierbei punktweise exakt bestimmt; die Näherung der Funktion  $K(x)$  kann mit Hilfe von  $\Delta x$  beliebig gesteuert werden. Beim Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  würde der Fehler zu Null werden. Hieraus ergibt sich, daß diese Annahme immer gute Ergebnisse liefert, wenn  $\Delta x$  entlang der Systemlinie variabel gehalten wird und im Bereich starker Krümmungsänderungen (starker Momentenänderungen) genügend klein gewählt wird.

- Der Einfluß der zwischen den Rissen liegenden Betonzugzone auf die Momenten-Krümmungsbeziehung - und damit auf das Verformungsverhalten - der Stahlbetonglieder wird nicht berücksichtigt.

Die Biegesteifigkeit eines gerissenen Stahlbetonbauteiles liegt bei niedrigerem Belastungsgrad höher als die nach Stadium II errechnete. Dieser Sachverhalt kann mit der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erklärt werden. Die Steifigkeit nach Stadium II trifft nur dann zu, wenn die Rißdichte sehr groß wird, z.B. in der Nähe des Traglastzustandes unter reiner Biegung. Dieses Problem hat Rao in (11) ausführlich behandelt. Die Gültigkeit dieser Untersuchungen beschränkt sich aber auf reine Biegung mit geringer Längskraft. Für hohe Normalkräfte fehlen entsprechende Grundlagen. Da in der vorliegenden Arbeit die Bestimmung der Traglast angestrebt wird und in diesem Zustand die Rißbildung i.d.R. ihr Maximum erreicht, werden die Steifigkeiten nach Stadium II zugrundegelegt und wird auf die Berücksichtigung des sog. "Rao-Effekts" zunächst verzichtet.

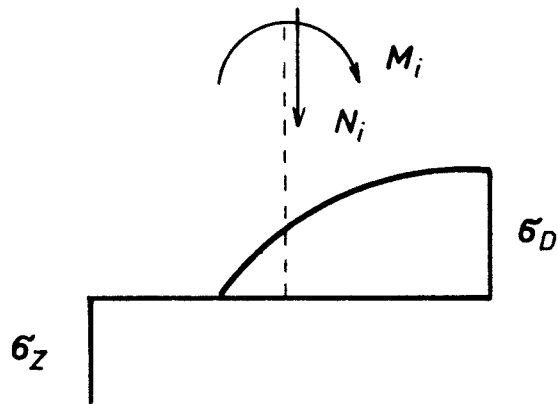
- Die Mitwirkung des Betons bei der Aufnahme der Zugkräfte wurde vernachlässigt:

Das Mitwirken des Betons auf Zug kann unberücksichtigt bleiben, da der Zugspannungskörper infolge seines geringen Hebelarmes in der Nähe der Nulllinie weder für die Steifigkeit noch für die Tragfähigkeit eine wesentliche Rolle spielt. Untersuchungen an exzentrisch belasteten Stahlbetonstützen in (3) haben gezeigt, daß der Einfluß der Betonzugspannungen auf die Traglast gering ist.

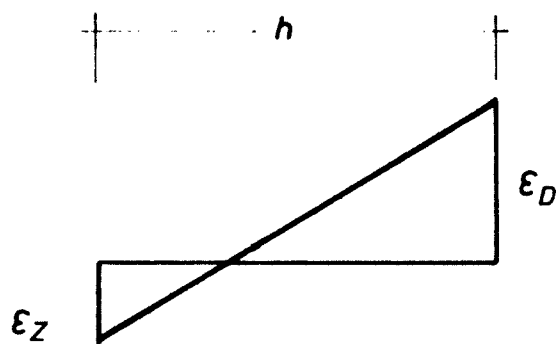
## 2.2 Theoretische Grundlagen des Rechenverfahrens

Das entwickelte Rechenverfahren zielt auf eine wirklichkeitsnahe Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung. Für das nichtlineare Problem wird das Kraftgrößenverfahren der Stabstatik angewendet und entsprechend modifiziert; unter ansteigender Belastung werden verträgliche Last-Verformungs-Zustände errechnet bis zum Versagen des Systems.

Die Grundlagen des Verfahrens werden wie folgt erläutert:



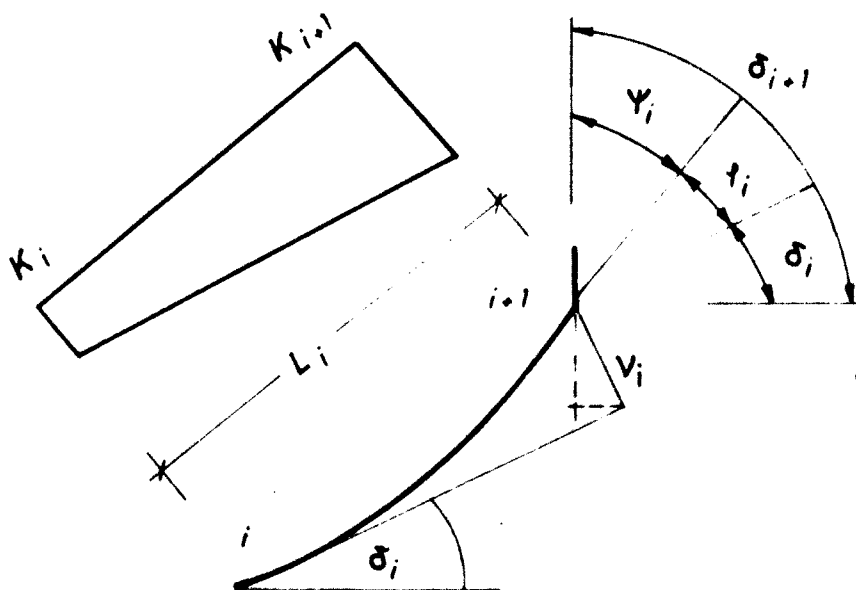
Spannungszustand eines Rechenquerschnittes infolge äußerer Schnittkräfte



zugehöriger Dehnungszustand

Krümmung:

$$K_i = \frac{\epsilon_D - \epsilon_Z}{h}$$



Ermittlung der Verformungskomponenten

$$\gamma_i = \frac{L_i (K_i + K_{i+1})}{2}$$

$$v_i = \frac{L_i^2 (2K_i + K_{i+1})}{6}$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \gamma_i + \Psi_i$$

$$x_{i+1} = x_i + L_i \cos \delta_i - v_i \sin \delta_i$$

$$y_{i+1} = y_i + L_i \sin \delta_i + v_i \cos \delta_i$$

**Bild 4** Grundelemente für die Verformungsrechnung der Querschnitte  $i$  und  $i+1$

a) Grundlagen der Verformungsrechnung

In einem auf Biegung mit Längskraft beanspruchten Stahlbetonquerschnitt kann - auf Grund der Annahmen nach Abschnitt 2.1 - zwischen dem Spannungszustand und dem Verformungszustand ein eindeutiger Zusammenhang hergestellt werden (s. Bild 4). Die in einem Querschnitt "i" aufgetretenen äußeren Schnittkräfte  $N_i^{(a)}$ ,  $M_i^{(a)}$  erzeugen einen Spannungszustand mit den charakteristischen Randspannungswerten  $\sigma_d$  (Betondruckspannung) und  $\sigma_z$  (Stahlzugspannung). Diesem Spannungszustand entsprechen innere Schnittkräfte  $N_i^{(i)}$  und  $M_i^{(i)}$ , die durch Integration der Spannungen zu gewinnen sind; sie stehen im Gleichgewicht mit den äußeren Schnittkräften. Der dem Spannungszustand des Querschnitts entsprechende Dehnungszustand wird mit den Rand-Dehnungswerten  $\epsilon_d$  (am Druckrand) und  $\epsilon_z$  (am Zugrand) beschrieben. Die zu den äußeren Schnittkräften  $N_i^{(a)}$ ,  $M_i^{(a)}$  zugehörige Krümmung ergibt sich zu:

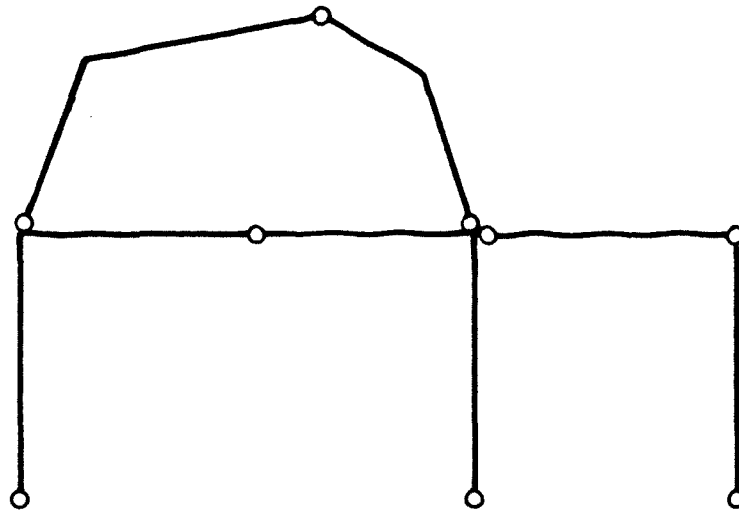
$$K_i = \frac{\epsilon_z - \epsilon_d}{h}$$

wobei "h" den Abstand der beiden charakteristischen Dehnungen bezeichnet. Wichtigste Aufgabe der Verformungsrechnung ist die Herstellung der Beziehung zwischen  $M_i^{(a)}$ ,  $N_i^{(a)}$  und  $K_i$ . Die Funktion  $K_i = f(M_i^{(a)}, N_i^{(a)})$  kann in analytischer Form nicht angegeben werden. Daher wurde ein numerisch-iteratives Verfahren für die Krümmungsbestimmung entwickelt.

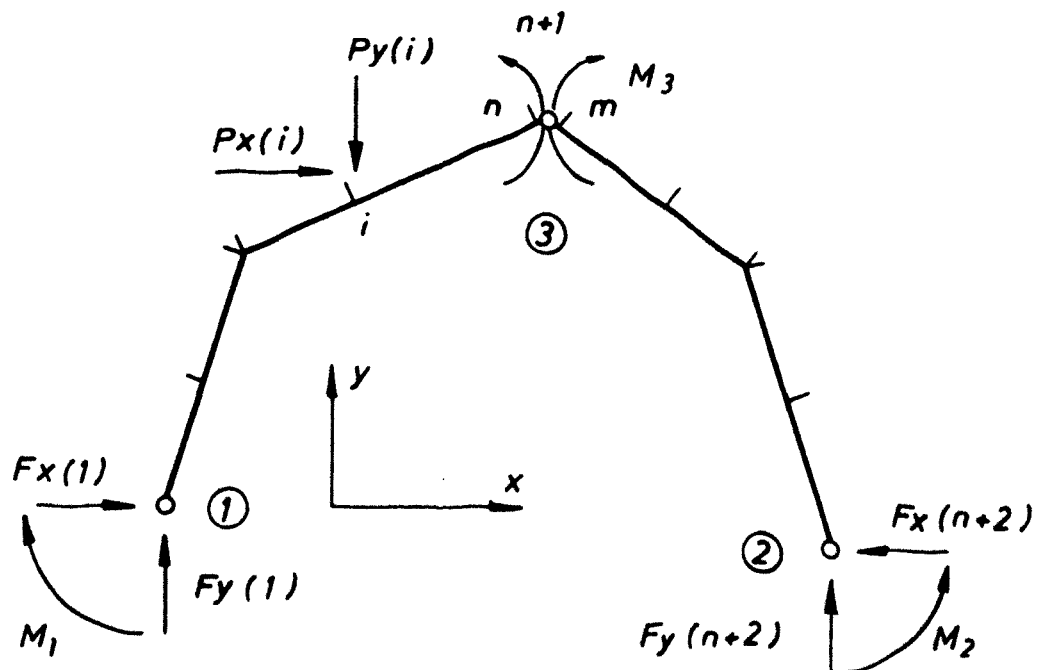
Schreibt man die Schnittkräfte als Funktionen der Randdehnungen auf:  $N_i = f_1(\epsilon_z, \epsilon_d)$ ,  $M_i = f_2(\epsilon_z, \epsilon_d)$ , so kann für vorgegebene Werte  $N_i^{(a)}$ ,  $M_i^{(a)}$  (weiter als N, M genannt) der zugehörige Dehnungszustand  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_d$  aus den folgenden Beziehungen iterativ errechnet werden:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_z} \cdot \Delta \epsilon_z + \frac{\partial N}{\partial \epsilon_d} \cdot \Delta \epsilon_d = \Delta N = N^{(i)} - N^{(a)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon_z} \cdot \Delta \epsilon_z + \frac{\partial M}{\partial \epsilon_d} \cdot \Delta \epsilon_d = \Delta M = M^{(i)} - M^{(a)}$$

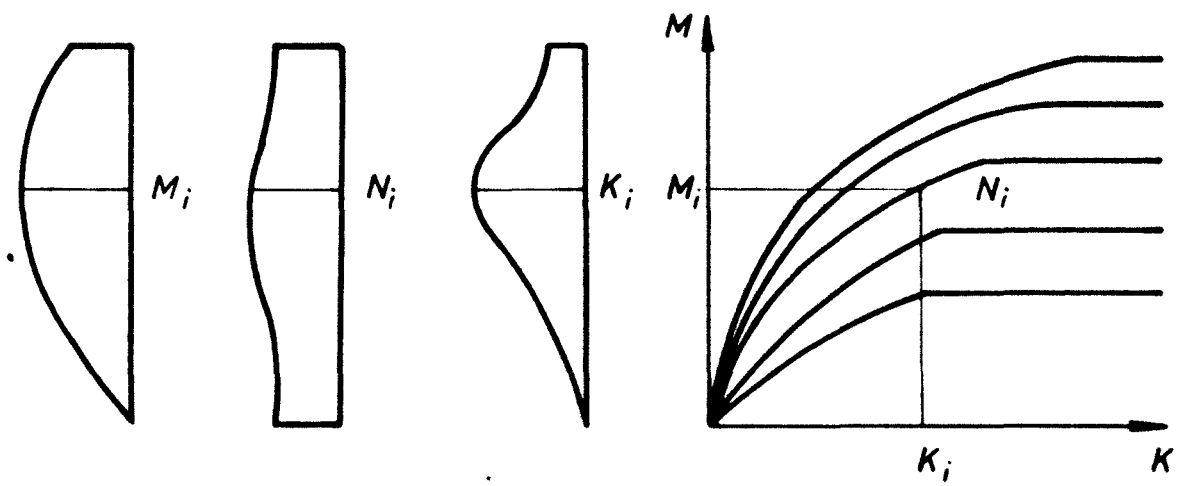


a) Statisches Grundsystem



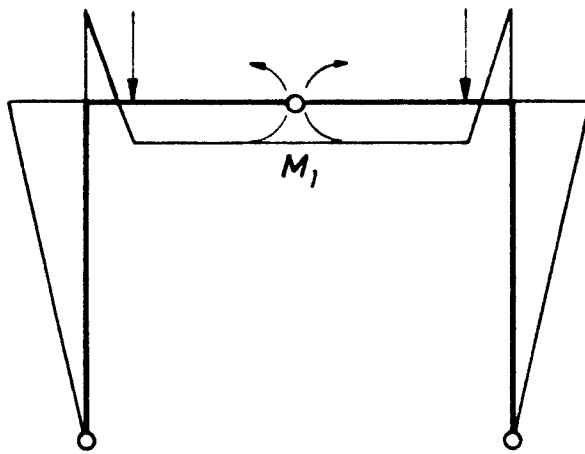
b) Rechenpunkte

**Bild 5 Statisches Grundsystem und  
Details der Rechenpunkte**

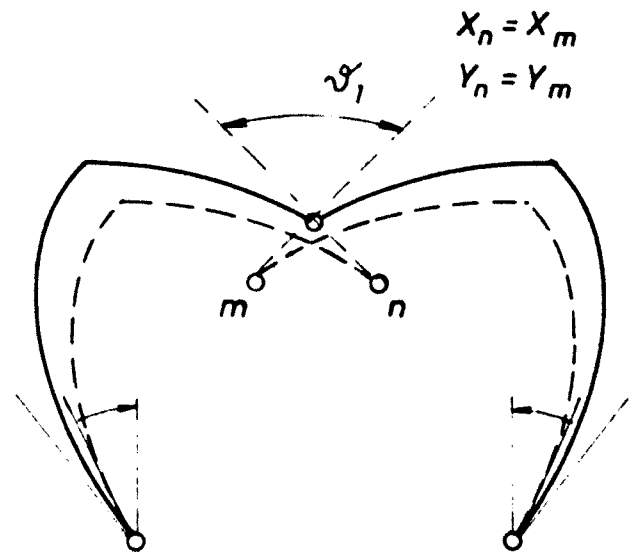


**Bild 6 Momenten-Krümmungsbeziehungen**

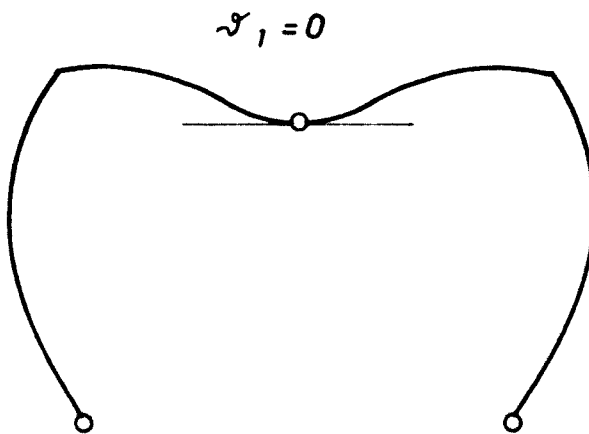




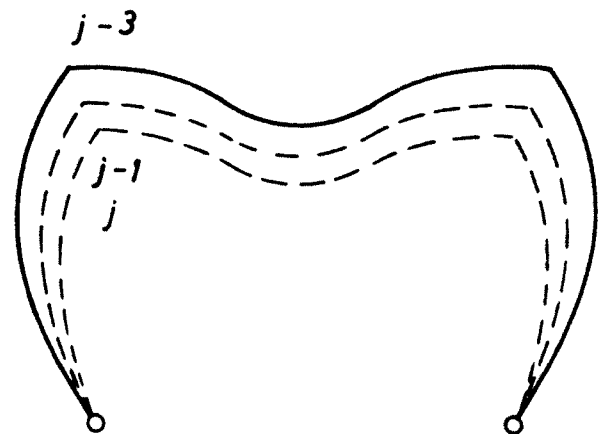
*Schnittkraftbestimmung mit vor-  
geschätztem  $M_1$*



*Erfüllung der ersten Verträ-  
glichkeitsbedingung*



*Erfüllung der zweiten Ver-  
träglichkeitsbedingung*



*Erfüllung der Zusatzbedin-  
gung nach Theorie II. Ordnung:  
Linie  $j-1$  und  $j$  fällt zusam-  
men*

**Bild 7 Schematische Darstellung des Rechenganges  
innerhalb einer Laststufe**

wobei jeweils aus einem vorgeschätzten Dehnungszustand, der die Funktionen  $N_i = f_1(\epsilon_z, \epsilon_d)$  und  $M_i = f_2(\epsilon_z, \epsilon_d)$  bereits erfüllt, ausgegangen wird. Die in Klammern stehenden Indizes bedeuten die inneren bzw. äußeren Schnittkräfte.

Nach einigen Iterationen wird  $N^{(i)} = N^{(a)}$  und  $M^{(i)} = M^{(a)}$  und damit der zu den äußeren Schnittkräften gehörende Dehnungszustand bestimmt, der die Krümmung liefert. So ist der funktionale Zusammenhang  $K = f(N, M)$  hergestellt in Form einer numerischen Prozedur. Praktisch kann das Verfahren in Form einer Bibliothekfunktion in einer Rechenanlage gespeichert und ebenso wie einfache Funktionen verwendet werden. Den schematischen Zusammenhang der Größen  $K$ ,  $N$ ,  $M$  stellt das Bild 6 dar.

#### b) Bestimmung der statisch Überzähligen

Die Anwendung des Kraftgrößenverfahrens zur Lösung des gegebenen Traglastproblems bedarf grundsätzlicher Modifizierungen. Wegen des nichtlinearen Zusammenhanges zwischen Belastung und Verformung treten Schwierigkeiten bei Bestimmung der statisch überzähligen Größen auf. Eine geschlossene Lösung ist nicht möglich, daher wird auch hier ein Iterationsverfahren verwendet.

Als Nullsystem eines ebenen Rahmensystems wird hier der Dreigelenkbogen (Dreigelenkrahmen) gewählt (s. Bild 5a). Dieses System bietet rechentechnische Vorteile bei der Ermittlung der Verträglichkeiten an den Schnittstellen (s. Abschn. 2.3 und Bild 7); die statisch Überzähligen sind hiernach immer Momente.

Zur Bestimmung der statisch überzähligen Momente müssen zunächst Näherungswerte aller Unbekannten vorgegeben werden; hierfür müssen die geschätzten Steifigkeiten der wirklichen Steifigkeit nahekommen. Gibt man z.B. bei einem

Zweigelenkrahmen für das stat. unbekannte Moment "Null" vor, wird die am Dreigelenkrahmen als Grundsystem errechnete Verformungslinie an der Schnittstelle unstetig und nicht affin der Verformungslinie des Zweigelenkrahmens, so daß die Lösung nur nach sehr zahlreichen Iterationsschritten erreicht wird.

Zur Ermittlung der statisch Unbekannten muß zunächst eine Beziehung zwischen den relativen Gelenkverdrehungen beider Schnittufer und den unbekannten Gelenk-Momenten hergestellt werden. Schreibt man diese Verdrehungswinkel als Funktion der unbekannten Momente auf, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= f_1 (M_1, M_2, \dots, M_n) \\ \vartheta_2 &= f_2 (M_1, M_2, \dots, M_n) \\ &\vdots \\ \vartheta_n &= f_n (M_1, M_2, \dots, M_n) \end{aligned}$$

Wird der Verformungszustand des Systems unter Einführung von Näherungswerten für die statisch Unbekannten ermittelt, ergeben sich i. a. Unstetigkeiten an den Schnittstellen, die zur Bildung statisch bestimmter Grundsysteme angebracht werden mußten. Um diese Unstetigkeiten zu beseitigen, müssen die Momente (also die statisch Überzähligen) verbessert werden. Diese Verbesserungswerte  $\Delta M_1, \Delta M_2, \dots$  sind aus folgendem nicht linearen Gleichungssystem zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial M_1} \Delta M_1 + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial M_2} \Delta M_2 + \dots + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial M_n} \Delta M_n &= -\vartheta_1 \\ \frac{\partial \vartheta_2}{\partial M_1} \Delta M_1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial M_2} \Delta M_2 + \dots + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial M_n} \Delta M_n &= -\vartheta_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \vartheta_n}{\partial M_1} \Delta M_1 + \frac{\partial \vartheta_n}{\partial M_2} \Delta M_2 + \dots + \frac{\partial \vartheta_n}{\partial M_n} \Delta M_n &= -\vartheta_n \end{aligned}$$

Die Linearisierung dieses Gleichungssystems erfolgt dadurch, daß die Differentialquotienten durch endliche, voneinander unabhängige Änderungen ( $\Delta M_1 \dots \Delta M_n$ ) der Gelenkmomente ersetzt und die hierdurch entstehenden Änderungen der Verdrehungswinkel ( $\Delta \vartheta_1 \dots \Delta \vartheta_n$ ) errechnet werden. Durch diesen Rechenvorgang erhält man erste Näherungswerte der Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial M_1}, \dots, \frac{\partial \vartheta_n}{\partial M_1}; \dots, \frac{\partial \vartheta_1}{\partial M_n}, \dots, \frac{\partial \vartheta_n}{\partial M_n}$$

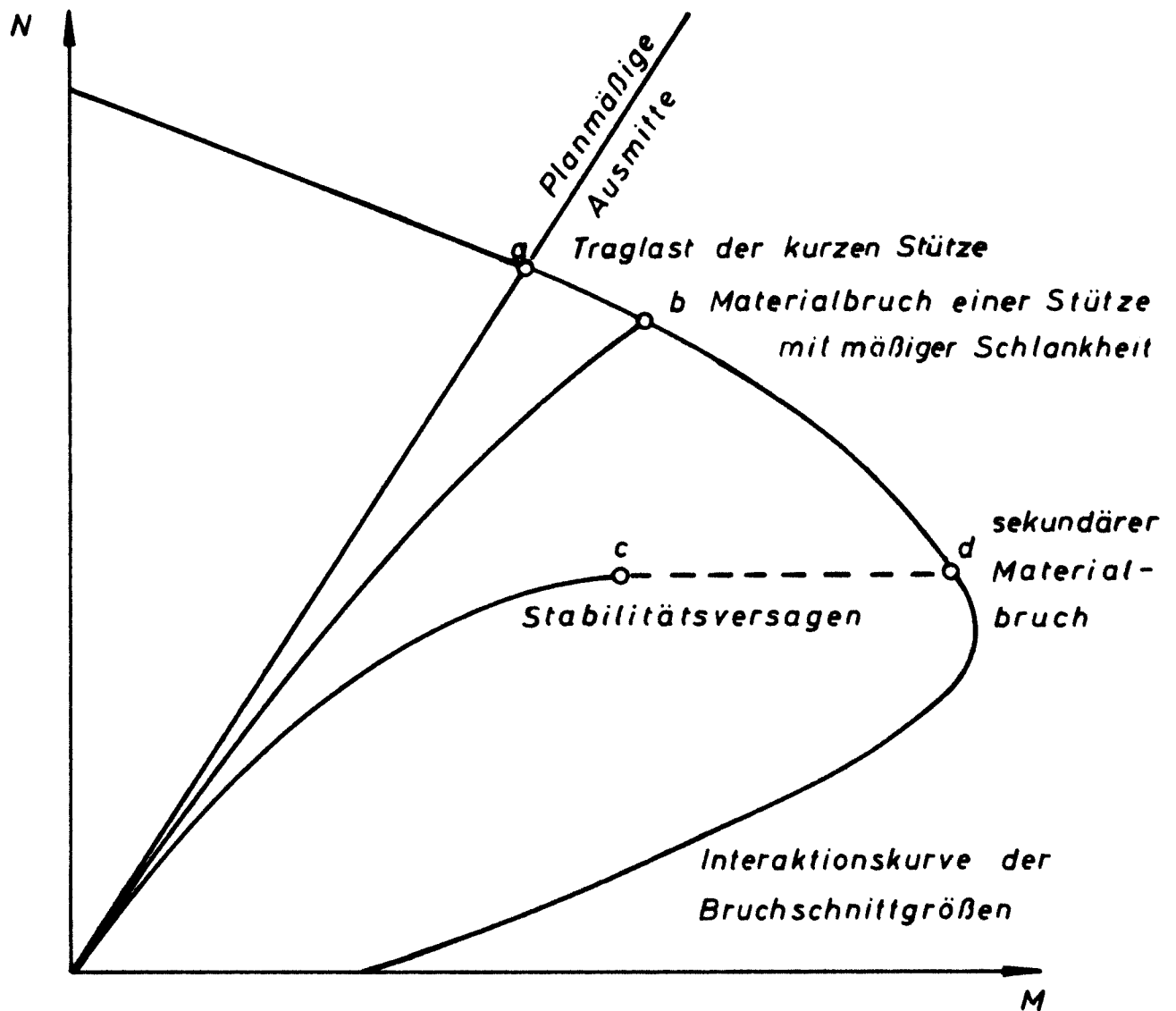
Löst man das linearisierte Gleichungssystem durch Einsetzen der genäherten Werte, erhält man eine gegenüber den zunächst eingeführten Näherungswerten verbesserte Lösung:

$$\begin{aligned} M_1^{k+1} &= M_1^k + \Delta M_1 \\ &\vdots \\ M_n^{k+1} &= M_n^k + \Delta M_n \end{aligned}$$

Der Kopfzeiger "K" bezeichnet den Iterationsschritt bei Auflösung des Gleichungssystems; nach wiederholter Iteration können die statisch überzähligen Momente mit der erwünschten Genauigkeit bestimmt werden.

### c) Definition des Traglastzustandes

Mit Hilfe der in Abschnitt a) und b) geschilderten Beziehungen kann für eine vorgegebene Belastung der verträgliche Gleichgewichts- und Verformungszustand ermittelt werden. Bei Laststeigerung ergeben sich naturgemäß neue Gleichgewichtszustände bis zum Versagen des Systems. Das Versagen eines Systems (Traglastzustand) kann zwei verschiedene Ursachen haben (Bild 8):



**Bild 8 Kriterien des Versagens von Stahlbetonrahmenstielen**

Bruchursachen:

Materialbruch

Als Kriterien des Materialbruches wird die Überschreitung der Bruchschnittgrößen - definiert mit Hilfe der Grenzdehnungen nach Bild 3 - betrachtet. (Punkt "a" und "b" in Bild 8).

Ein typischer Punkt ist "a" im Bild 8, weil er die Traglast der "kurzen Stütze" bedeutet, also die Kapazität des Querschnitts ohne Traglastabfall infolge Verformung des Systems.

Stabilitätsbruch

Ein Versagen durch Instabilwerden des Systems tritt auf, wenn keine Gleichgewichtslage mehr möglich ist, wenn also bei Laststeigerung der Zuwachs der äußeren Schnittkräfte größer wird als der der inneren Schnittkräfte. Dies zeigt sich dadurch, daß keine Kovergenz eintritt (Punkt "c" des Bildes 8). Bei zu großer Laststeigerung kann der Zuwachs der äußeren Schnittkräfte so groß werden, daß die Bruchkriterien überschritten werden (Punkt "d" des Bildes 8); dies ist aber ein unechter Materialbruch, weil das Versagen schon vorher, also bei geringeren Verformungen eintrat.

2.3 Beschreibung des Rechenprogramms

Zur Bestimmung der Traglast ist eine sehr große Anzahl von numerischen Operationen erforderlich, die praktisch nur mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen zu bewältigen sind. Das für die Lösung dieser Aufgabe erstellte Rechenprogramm wurde nach gleichen Prinzipien wie bei Cranston (5) aufgebaut. Unter Beibehaltung seines Grundkonzeptes wurden einige, die Behandlung der M-K-Beziehungen betreffende Änderungen vorgenommen. Die wichtigsten Unterschiede zwischen dem Verfahren nach Cranston und dem in dieser Arbeit verwendeten sind die folgenden:

1. In (5) werden die M-K-Beziehungen durch vorher durchgeführte Messungen ermittelt und in Form von Polygonzügen für konstante Normalkräfte, konstanten Querschnitt und unveränderliche Bewehrung gespeichert. Das ergibt zwar für Nachrechnungen eine

größere Genauigkeit, ist aber im allgemeinen Fall naturgemäß nicht gangbar. Demgegenüber bildet das in dieser Arbeit angewandte Iterationsverfahren zur Bestimmung der M-N-K-Funktion eine rein numerisch-analytische Methode, die keinerlei Versuche benötigt. Dabei eröffnet sich die Möglichkeit, beliebig veränderliche Normalkräfte, Querschnitte und Bewehrungen zu berücksichtigen. So ist dieses Verfahren für ein allgemeineres Studium geeigneter.

2. Das Verfahren nach (5) wurde auf die Traglastbestimmung von Biegebauteilen abgestellt. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß hoher Normalkräfte mitberücksichtigt und die Anwendung der Methode für Stabilitätsprobleme erprobt.

Das Rechenprogramm geht von folgenden Überlegungen aus:

Als Nullsystem wird der Dreigelenkbogen gewählt. Dieses System bietet aus rechentechnischen Gründen Vorteile: die statisch überzähligen Größen sind immer Momente. Das kontinuierliche System wird auf eine endliche Anzahl von Abschnitten aufgeteilt; so entstehen diskrete Rechenpunkte (siehe Bild 5b). Die äußeren Lastkomponenten  $P_x$ ,  $P_y$  sowie die anteiligen Eigengewichte wirken in diesen Rechenpunkten, die zugehörigen Verformungs- und Beanspruchungsgrößen werden dort errechnet.

Die Durchführung der Berechnung für die erste Laststufe erfordert zunächst vorgeschätzte Werte für die statisch überzähligen Momente  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (bei n-fach statisch unbestimmtem System). Diese Momente gemeinsam mit den äußeren Lasten erzeugen äußere Schnittkräfte,  $N_i^{(a)}, M_i^{(a)}$ , die am unverformten System im Gleichgewicht sind. Errechnet man die zu den Wertepaaren  $N_i^{(a)}, M_i^{(a)}$  gehörenden Krümmungswerte  $K_i$  und hieraus die Verformungslinie des Gesamtsystems (Einzelheiten siehe Bild 4), so erhält man für die zwei Bogenteile des Nullsystems im allgemeinen Verformungslinien, die unverträglich sind, weil sie die folgenden Bedingungen nicht erfüllen:

1. Die Koordinaten des Mittelgelenkes  $X_n, Y_n$  müssen - aus beiden Bogenteilen errechnet - identisch sein.
2. Die beiden Schnittufer an der Stelle der statisch unbestimmten Momente müssen eine gemeinsame Tangente besitzen.

Die für die Verformungsrechnung verwendeten Zusammenhänge sind in Bild 4 dargestellt. Hierbei wird der Vorgang veranschaulicht, wie die einzelnen Verformungselemente definiert und errechnet werden mit Hilfe der dort angegebenen Rekursionsformel. Als Ausgangsgrößen sind  $N_i^{(a)}, M_i^{(a)}$  bekannt, der zugehörige Dehnungszustand und damit die Krümmung können zugeordnet werden. Unter der Annahme einer linearen Krümmungsänderung zwischen den Rechenpunkten  $i$  und  $i+1$  werden die Werte für die Koordinaten  $x, y$  und für die Tangente  $\delta$  ermittelt.

Um die erste Verträglichkeitsbedingung zu erfüllen, werden die als starr angesehenen Bogenteile um ihre Fußgelenke so gedreht, bis der Schnittpunkt der Bahnen der zwei Bogenenden das gemeinsame Mittelgelenk (siehe Bild 7) bestimmt. Die zweite Verträglichkeitsbedingung wird durch schrittweise Änderung der vorgeschätzten statisch überzähligen Momente  $M_1, M_2, \dots, M_n$  herbeigeführt. So entsteht eine Verformungslinie, die aus einem Beanspruchungszustand ermittelt wurde, dem noch die unverformte Systemlinie zugrunde lag. Gibt man die errechnete Verformungslinie als Systemlinie erneut vor und wiederholt den vorher beschriebenen Rechengang, erhält man einen neuen Verformungszustand, der von dem vorhergehenden weniger abweicht, als bei dem ersten Iterationsschritt. Dieser Vorgang wird sooft wiederholt, bis sich der gesuchte Zustand einstellt, in welchem Gleichgewichtsbedingungen und Verträglichkeitsbedingungen am verformten System erfüllt sind:



1. Gleichgewichtsbedingungen (für jeden Schnitt "i")

$$N_i^{(i)} = N_i^{(a)}$$

$$M_i^{(i)} = M_i^{(a)}$$

2. Verträglichkeitsbedingungen (für jedes Gelenk "n")

a. 
$$\begin{aligned} |x_n^l - x_n^r| &\leq g_1 \\ |y_n^l - y_n^r| &\leq g_1 \end{aligned}$$

b. 
$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(M_1, M_2, \dots, M_n) \leq g_2 \\ &\vdots \\ v_n &= f_n(M_1, M_2, \dots, M_n) \leq g_2 \end{aligned}$$

c. Zusatzbedingung für die Zusammengehörigkeit der Verformungen und Schnittkräfte nach Theorie II. Ordnung:

$$|x_i^j - x_i^{j+1}| \leq g_1$$

$$|y_i^j - y_i^{j+1}| \leq g_1$$

hierbei bedeuten:

N = Normalkraft

M = Biegemoment

i = Ortsindex

j = Index der Iterationsschritte einzelner kompatiblen Verformungslinien

(i) = Index für innere Schnittkräfte

(a) = Index für äußere Schnittkräfte

x, y = Koordinaten der Rechenpunkte

n = Index der Gelenke

$v_1, \dots, v_n$  = Inkompatibilitäten in den Gelenken

$M_1, \dots, M_n$  = Unbekannte Gelenkmomente

$g_1, g_2$  = Fehlergrenzen

Durch gleichzeitige Erfüllung aller dieser Bedingungen befindet sich das System in einem mit sämtlichen Verformungen verträglichen Gleichgewichtszustand.

Nach Beendigung der Untersuchung einer Laststufe werden die Lasten gesteigert. Als Systemlinie wird die Verformungslinie der nächst niedrigeren Laststufe vorgegeben. Schließlich nähert sich die Last der Traglast; bei Erreichen einer der Traglastkriterien wird der Rechenprozeß beendet.

Der Aufbau der Rechenprogramme ist in Form eines vereinfachten Flußdiagramms dem Anhang zu entnehmen.

Das vorher beschriebene Rechenprogramm wurde in der problemorientierten Programmsprache FORTRAN IV geschrieben und auf der Rechenanlage IBM 7094 des Deutschen Rechenzentrums in Darmstadt getestet. Eine Variante für die kleinere Rechenanlage IBM 1130 wurde ebenso erstellt. Die erforderliche Rechenzeit für einen Zweigelenkrahmen unter Vertikallast auf der Anlage IBM 1130 beträgt je Laststufe 3 bis 5 Minuten, auf der Anlage IBM 7094 0,2 bis 0,3 Minuten. Um einen erträglichen Rechenaufwand zu erhalten, wurde die Anzahl der Laststufen möglichst klein gehalten; nur in unmittelbarer Nähe des Traglastzustandes wird die Last in kleinen Schritten gesteigert. Mit einem Ausgangswert von ca. 50 % der Traglast (vorgeschätzt) kann nach 10 bis 15 Laststufen die Traglast mit 1 bis 2 % Genauigkeit bestimmt werden. Eine größere Genauigkeit wurde in Anbetracht der sonstigen Unsicherheiten in den Rechenannahmen nicht angestrebt.

#### 2.4 Kritische Betrachtungen

Die Traglastbestimmung zusammengesetzter ebener Rahmensysteme war die Aufgabe, die mit Hilfe eines Rechenprogramms rein numerisch-analytisch gelöst wurde. Um das Problem rechnerisch erfassen zu können, wurden Annahmen getroffen, die nur vergleichsweise geringfügige Vernachlässigungen enthalten und eine wirklichkeitsnahe Berechnung ermöglichen. Die Traglast wird unter stetig steigender Kurzzeitbelastung bestimmt, mögliche Entlastungen, Wechselbelastung, können in der jetzigen Form der Methode nicht berücksichtigt werden. Ebenso sind zeitabhängige Einflüsse, wie

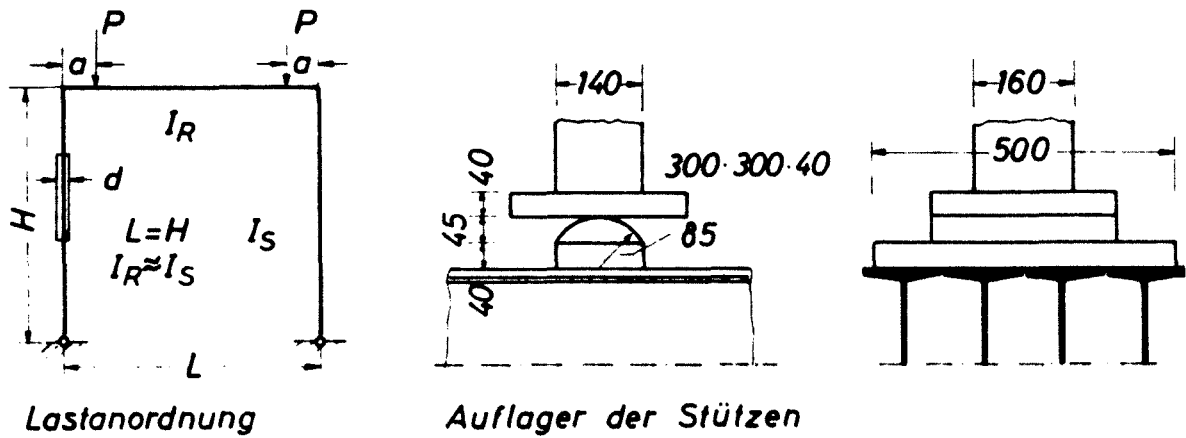
Kriechen und Schwinden außer acht gelassen. Der Einfluß des Mitwirkens der Betonzugzone zwischen den Rissen - genannt Rao-Effekt, s.(11) - wurde ebenfalls nicht berücksichtigt. Die genannten Einflüsse bedürfen noch einer intensiven Grundlagenforschung, die nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

In der vorliegenden Arbeit wurde beabsichtigt, ein Traglastverfahren zu beschreiben, das ähnlich genaue Ergebnisse liefert, wie das zur Bestimmung von Stützentraglasten verwendete "exakte" Verfahren.

Das Verfahren bietet ferner die Möglichkeit, auch die statisch unbestimmte Lasteintragung in stabilitätsgefährdete Druckglieder zu erfassen und dabei die Interaktion zwischen Biege- und Druckgliedern zu studieren. Das Rechenprogramm wurde zunächst auf Zweigelenkrahmen abgestellt und überprüft. Es ist zweckmäßig, einfache Systeme zu studieren, um einen tragbaren Rechenaufwand zu erreichen. Auch liegen Vergleichsversuche am Zweigelenkrahmen vor.

Theoretisch könnte man das Verfahren für beliebig ebene Rahmensysteme anwenden unter der Beschränkung, daß sie in zusammenhängende Dreigelenkbogen-Nullsysteme zerlegt werden können. Praktisch scheint dies ein wenig gangbarer Weg zu sein, da er einen sehr großen Rechenaufwand selbst an Großrechenanlagen erfordern würde und im allgemeinen Fall Schwierigkeiten mit der Konvergenz auftreten könnten. Aus diesem Grunde wird angestrebt, die genauen Untersuchungen auf die einfachsten Systeme zu beschränken und damit Näherungslösungen (z.B. das Ersatzstabverfahren) zu überprüfen.

---



Tafel 1

Rahmen	Versuch	Abmes- sungen	Bezogene Stiellänge	Ausmittigkeit		
				a	e	m
Nr.	Nr.	H=L [cm]	H/d 1.)	[cm]	[cm] 2.)	3.)
I	19	210	15	2,7	1,60	0,69
II	20	280	20	3,6	2,13	0,91
III	21	420	30	5,3	3,14	1,35
IV	22	560	40	7,1	4,21	1,80
I	23	210	15	16,9	9,32	3,99
I	24	210	15	37,9	18,64	7,99
III	25	420	30	16,2	9,35	4,01
III	26	420	30	33,9	18,70	8,01

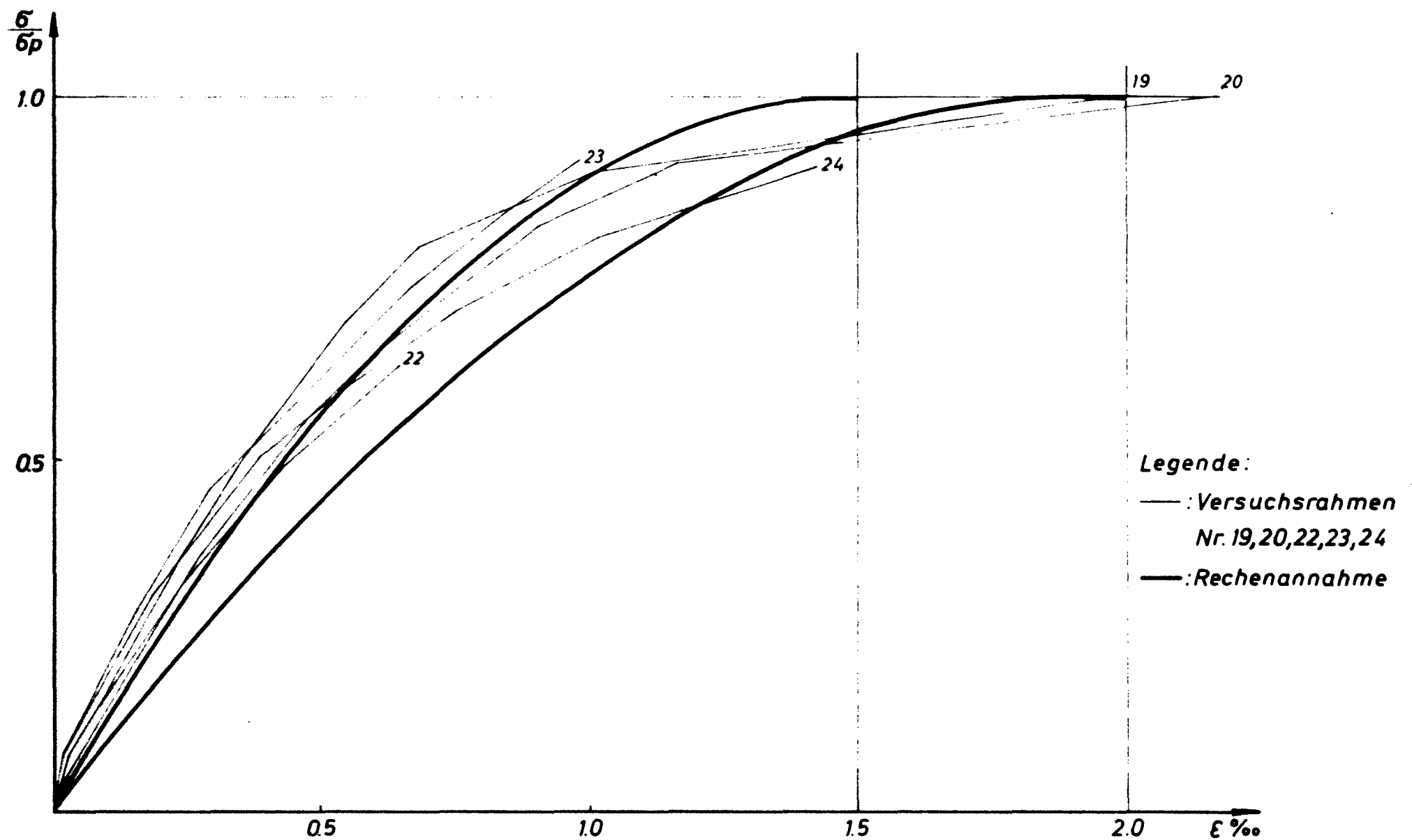
1.)  $H/d = \text{Bezogene Stiellänge}$

2.)  $e = M/P = \frac{3a(L-a)}{5L}$  ; M = Eckmoment

3.)  $m = e/k = 6 \cdot e/d$  ; k = Kernweite ;

**Bild 9 Knickversuche mit Zweigelenrahmen -  
Angaben zu den Versuchen**

[illegible]



**Bild 11** Gemessene und rechnerische Arbeitslinien des Betons der Versuchsrahmen

### 3. Nachrechnung von Rahmenversuchen

#### 3.1 Beschreibung der Versuche

Im Heft 171, DAfStb, (6) wurde über eine Versuchsserie an Stahlbeton-Zweigelenkrahmen berichtet, die an der TU Dresden durchgeführt wurden. Die Belastung erfolgte lotrecht und symmetrisch, der Querschnitt und die Bewehrung der Stützen und des Riegels blieben konstant, als Variable waren die Schlankheit der Stützen, die Riegeellänge und die Exzentrizität eingeführt. Die Rahmen waren symmetrisch und infolge der Versuchsdurchführung unverschieblich.

---

Über die Geometrie und Laststellung geben Tafel 1 bzw. Bild 9 Auskunft. Die Lasteinleitung und das Auflager der Stützen erfolgte mit stählernen Linien-Auflagerplatten. Konstruktionseinzelheiten der Versuchsrahmen zeigt Bild 10. Fünf Versuchsrahmen waren mit und sechs ohne Vouten ausgebildet. Die Versuche unter Kurzzeitbelastung wurden am 45. Tage nach dem Betonieren durchgeführt. Für die Betonfestigkeit bzw. seine Verformungseigenschaften wurden Würfel- und Prismen-Probekörper angefertigt und im Zeitpunkt der Versuche geprüft. Auf Bild 11 ist die gemessene Betonelastizität - unter mittlerer Belastung an unbewehrten Probekörpern gemessen - mit den für die Nachrechnungen verwendeten  $\sigma - \epsilon$  - Diagrammen gegenübergestellt. Es zeigt sich, daß die der Rechnung zugrundegelegten Arbeitslinien einen ähnlichen Verlauf haben wie die gemessenen  $\sigma - \epsilon$  - Diagramme. Die Festigkeit des verwendeten Stahles (St I) ist während der Dauer der Versuche - die 11 Rahmenversuche haben etwa zwei Jahre in Anspruch genommen - ständig überprüft worden.

#### 3.2 Nachrechnung der Versuche

##### 3.2.1 Rechengrundlagen

Für die Nachrechnung der Versuche an Zweigelenkrahmen wurden folgende Parameter der in Bild 3 dargestellten mittleren Betonarbeitslinie variiert: 1.)  $\epsilon_0 = 0,0015, 0,0020$  und  $0,0025$  mit  $\beta_R = 0,85 \cdot \beta_w$ ; 2.)  $\epsilon_0 = 0,0015, 0,0020$  mit  $\beta_R = \beta_p$ .

Hierbei blieben alle anderen Parameter unverändert. Mit den systematischen Variationen des Kennwertes  $\epsilon_0$  entstanden die folgenden Anfangs- $E_0$ -Moduli:

$$E_{01} = \beta_R \cdot 1330 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_{02} = \beta_R \cdot 1000 \text{ kp/cm}^2$$

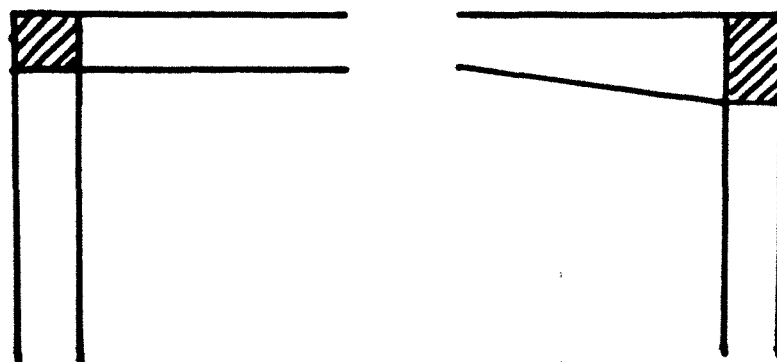
$$E_{03} = \beta_R \cdot 800 \text{ kp/cm}^2$$

wobei der Ansatz  $\sigma = \beta_R \left( 2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^2 \right)$  Verwendung fand.

Die  $\beta_R$  - Werte wurden aus den 45 Tage alten Probewürfeln bzw. Prismenfestigkeiten entnommen. Für den Baustoff Stahl wurde die im Bild 3 dargestellte bilineare Arbeitslinie - entsprechend dem verwendeten Stahl I - mit der gemessenen mittleren Fließgrenze  $\beta_s = 3210 \text{ kp/cm}^2$  als Scheitelwert verwendet.

Zu den Nachrechnungen der Versuche sind noch einige rechen-technisch bedingte Bemerkungen zu machen:

Die mit Hilfe von Linienauflagern übertragene Belastung ist als exakte Einzellast aufgefaßt worden. Es wurde grundsätzlich von der Betonoberfläche mit einem konstanten Abstand entfernter, der Größe nach veränderlicher Bewehrung gerechnet. Der Betonquerschnitt wurde als Bruttoquerschnitt ohne Abzug der Bewehrung in die Rechnung eingeführt. Hinsichtlich der Behandlung der Rahmenecken in der Verformungsrechnung wurde vorausgesetzt, daß der durch die Anschnittebenen des Riegels bzw. der Stütze begrenzte Körper unverformbar, also unendlich steif ist (siehe Skizze).



**Rahmenecken als starre Körper**



**Tafel 2:** Nachrechnung der Rahmenversuche des Heftes 171 vom DAfStB  
 Betonarbeitslinie mit Scheitelwert  $\beta_R = 0,85 \cdot \beta_w$

Vers. Nr.	e/d	h/d	$\beta_w$ kp/cm <sup>2</sup>	$\beta_P$ kp/cm <sup>2</sup>	$\beta_P/\beta_w$	$P_V$ Mp	$P_R$	$P_R$	$P_R$	$P_R/P_V$	$P_R/P_V$	$P_R/P_V$
							$\epsilon_o=1,5$	$\epsilon_o=2,0$	$\epsilon_o=2,5$	$\epsilon_o=1,5$	$\epsilon_o=2,0$	$\epsilon_o=2,5$
19	0,114	15	309	208	0,67	55,0	55,7	54,9	54,2	1,01	1,00	0,98
19 <sub>v</sub>	< 0,114	15	349	260	0,75	43,8	60,5	56,6	54,8	1,38	1,29	1,25
20	0,152	20	286	242	0,85	36,0	44,4	43,2	38,7	1,23	1,20	1,08
20 <sub>v</sub>	< 0,152	20	330	268	0,81	41,8	50,6	47,1	46,7	1,21	1,12	1,11
21	0,224	30	273	225	0,82	24,2	27,7	27,1	25,0	1,15	1,12	1,04
22	0,300	40	312	254	0,81	18,5	16,6	15,4	15,2	0,90	0,83	0,82
23	0,667	15	307	228	0,74	17,3	15,9	15,6	15,4	0,92	0,90	0,89
24	1,333	15	324	247	0,76	8,05	5,8	5,6	5,8	0,72	0,70	0,72
25	0,668	30	278	219	0,79	10,65	13,6	13,2	13,2	1,28	1,24	1,24
26	1,336	30	298	210	0,71	5,20	6,0	6,0	5,9	1,15	1,15	1,13
26 <sub>v</sub>	< 1,336	30	330	246	0,75	6,60	6,0	6,2	6,0	0,91	0,94	0,91

**Tafel 3: Nachrechnung der Rahmenversuche des Heftes 171 des DAfStB**  
**Betonarbeitslinie mit Scheitelwert  $\beta_R = \beta_P$**

Vers. Nr.	e/d	h/d	$\beta_w$ kp/cm <sup>2</sup>	$\beta_P$ kp/cm <sup>2</sup>	$\beta_P/\beta_w$	$P_V$ Mp	$P_R$	$P_R$	$P_R/P_V$	$P_R/P_V$
							$\epsilon_o=1,5$	$\epsilon_o=2,0$	$\epsilon_o=1,5$	$\epsilon_o=2,0$
19	0,114	15	309	208	0,67	55,0	45,8	45,8	0,83	0,83
19 <sub>v</sub>	0,114	15	349	260	0,75	43,8	55,2	54,2	1,26	1,24
20	0,152	20	286	242	0,85	36,0	45,4	43,8	1,26	1,22
20 <sub>v</sub>	0,152	20	330	268	0,81	41,8	48,6	47,4	1,16	1,13
21	0,224	30	273	225	0,82	24,2	26,6	25,8	1,10	1,07
22	0,300	40	312	254	0,81	18,5	15,3	15,3	0,83	0,83
23	0,667	15	307	228	0,74	17,3	15,5	15,5	0,90	0,90
24	1,333	15	324	247	0,76	8,05	5,06	5,6	0,70	0,70
25	0,668	30	278	219	0,79	10,65	13,5	13,1	1,27	1,23
26	1,336	30	298	210	0,71	5,20	5,6	5,6	1,08	1,08
26 <sub>v</sub>	1,336	30	330	246	0,75	6,60	5,8	5,7	0,88	0,86

Tafel 4: Vergleich der rechnerischen Traglasten  
mit den Versuchstraglasten <sup>+)</sup>

$$a_i = P_{K, \text{ rechn.}} / P_{K, \text{ versuch}}$$

Nr.	$\varepsilon_0$ %	$B_R$	Mittelwert	Streuung	Variationskoeff.
			$a_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$	$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (a_i - a_m)^2}{n-1}}$	$V = 100 \cdot S / a_m [\%]$
1	1,5	$0,85 \cdot B_w$	1,08	18,3	17,0
2	2,0	$0,85 \cdot B_w$	1,05	14,4	13,7
3	2,5	$0,85 \cdot B_w$	1,02	13,5	13,3
4	1,5	$B_p$	1,03	17,8	17,2
5	2,0	$B_p$	1,02	16,3	16,0

+ ) Die Werte sind mit Ausschluß der extremen Abweichungen (Nr. 19<sub>w</sub> u. 24) ermittelt worden.

### 3.2.2 Vergleich der Traglasten

In den Tafeln 2 - 4 werden die Versuchsergebnisse den Rechen-  
ergebnissen gegenübergestellt. In Tafel 2 sind die Ergebnisse  
der Nachrechnungen mit dem Scheitelwert der Arbeitslinie des  
Betons  $\beta_R = 0,85 \beta_w$  aufgeführt, in Tafel 3 mit  $\beta_R = \beta_p$ .  
Der Übersichtlichkeit halber wurden die wichtigsten Parameter  
der Stützen, wie bezogene Exzentrizität, Schlankheit, Beton-  
kennwerte, mitangegeben.

Auf Grund dieser Ergebnisse können folgende Aussagen gemacht  
werden:

- 1) Die Nachrechnungen ergaben gute Übereinstimmung zwischen  
den rechnerisch ermittelten und den Versuchstraglasten.
- 2) Die Genauigkeit der Traglastbestimmung liegt in gleicher  
Größenordnung wie bei Stützenrechnungen. (Nach Tafel 4,  
Zeile 2)

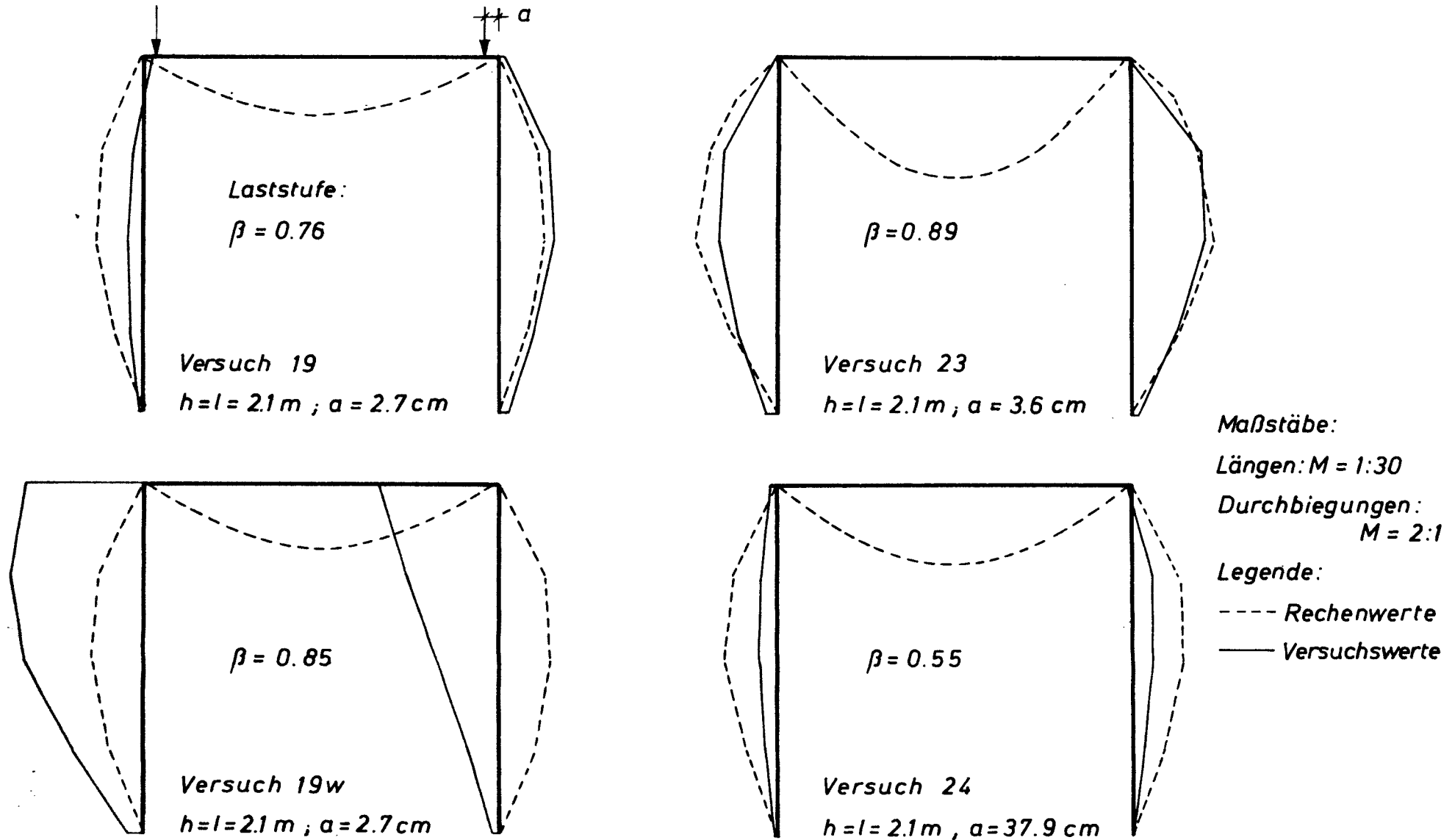
Mittelwert: 1,05

Variationskoeffizient: 13,7 %

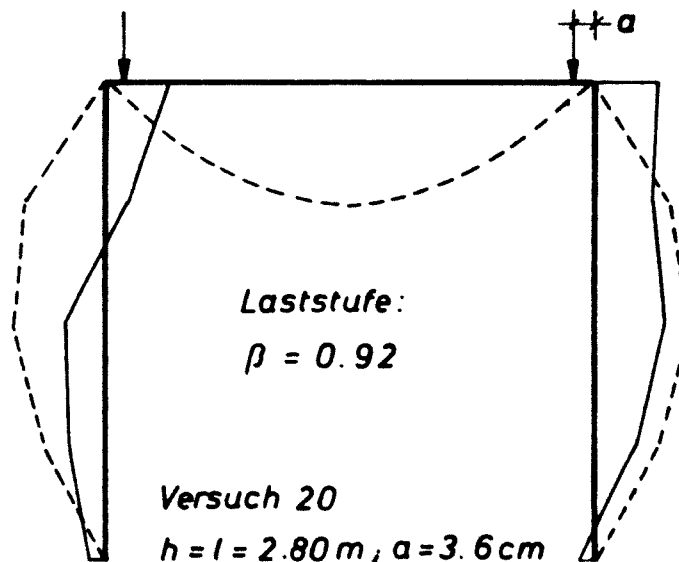
- 3) Die Berechnungsmethode ist wenig empfindlich auf geringe  
Änderungen in der Annahme der Form einer Betonarbeitslinie.  
Daher kann die in der Literatur besser belegte Arbeitslinie  
nach Bild 3 ( $\beta_R = 0,85\beta_w$ ) als Rechengrundlage für die Trag-  
lastbestimmung herangezogen werden. Es hat sich bestätigt,  
daß die Annahme einer mittleren Betonarbeitslinie hinsicht-  
lich der Traglastbestimmung durchaus berechtigt ist und  
es unnötig ist, komplizierte, von der Betongüte abhängige  
Arbeitslinien zu verwenden, wie dies z.B. in Bild 2b  
vorgeschlagen wird.

### 3.2.3 Vergleich der Verformungen

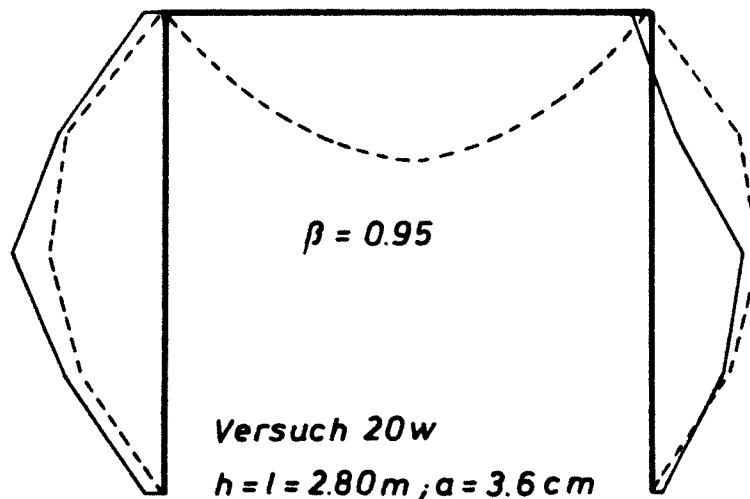
Im Abschnitt 3.2.2 ist gezeigt worden, daß das erarbeitete  
Rechenverfahren zu Traglasten führt, die mit den Versuchswerten  
gut übereinstimmen. Wie weit die errechneten Verformungen mit  
den gemessenen Verformungen übereinstimmen, wird nachfolgend  
erläutert:



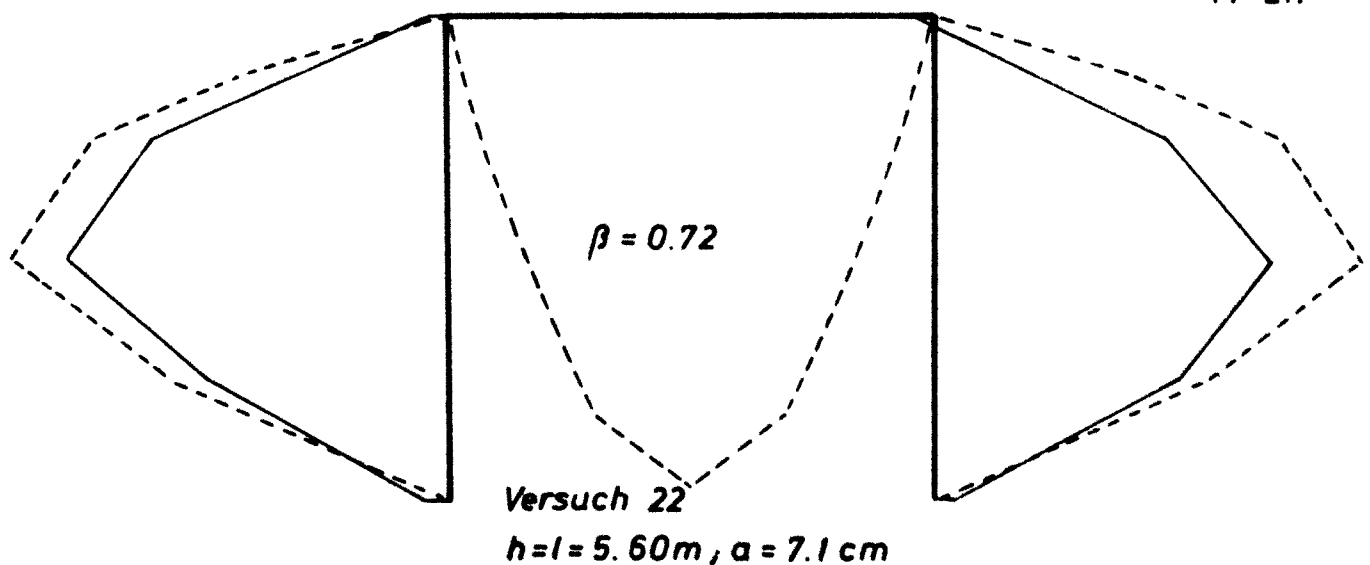
**Bild 12** Vergleiche der Verformungslinien der Versuchsrahmen mit den rechnerischen Verformungslinien



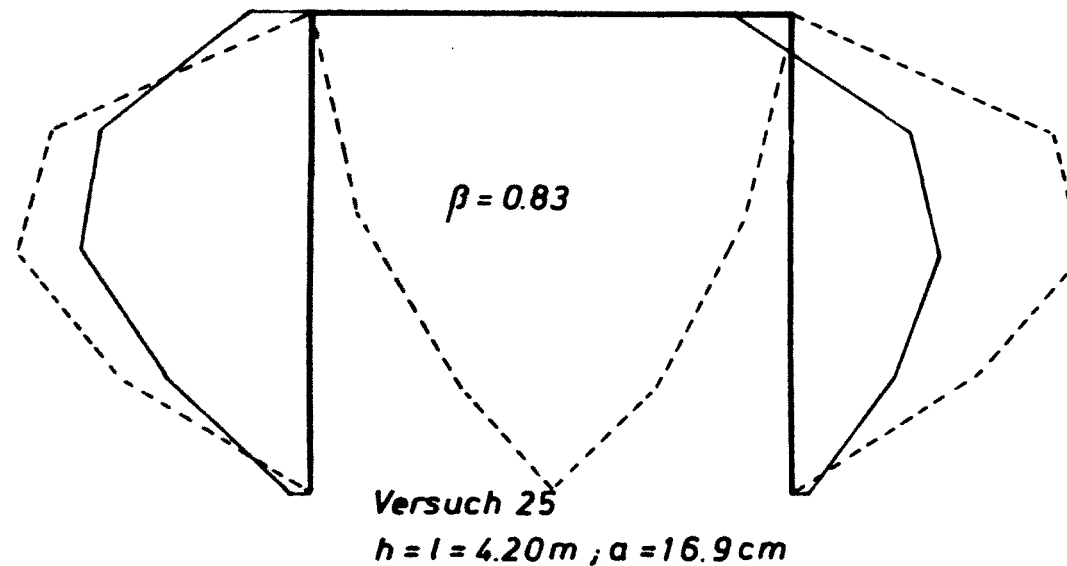
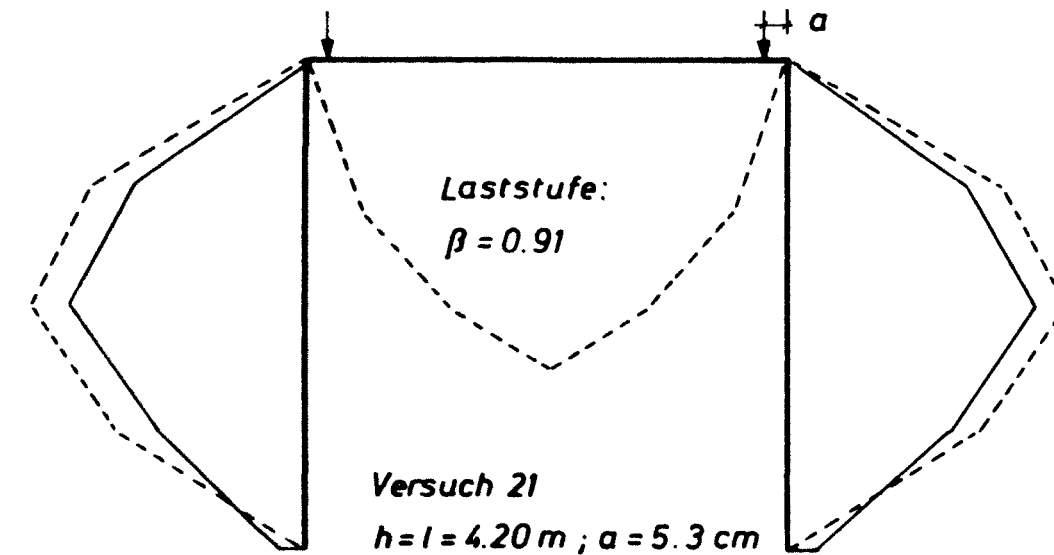
**Maßstäbe:**  
 Längen:  $M \sim 1:45$   
 Durchbiegungen  
 $M = 2:1$



**Maßstäbe:**  
 Längen:  $M \sim 1:90$   
 Durchbiegungen  
 $M = 2:1$



**Bild 13** *Vergleiche der Verformungslinien der Versuchsrahmen mit den rechnerischen Verformungslinien*



Maßstäbe:

Längen :  $M = 1:66 \frac{2}{3}$

Durchbiegungen:

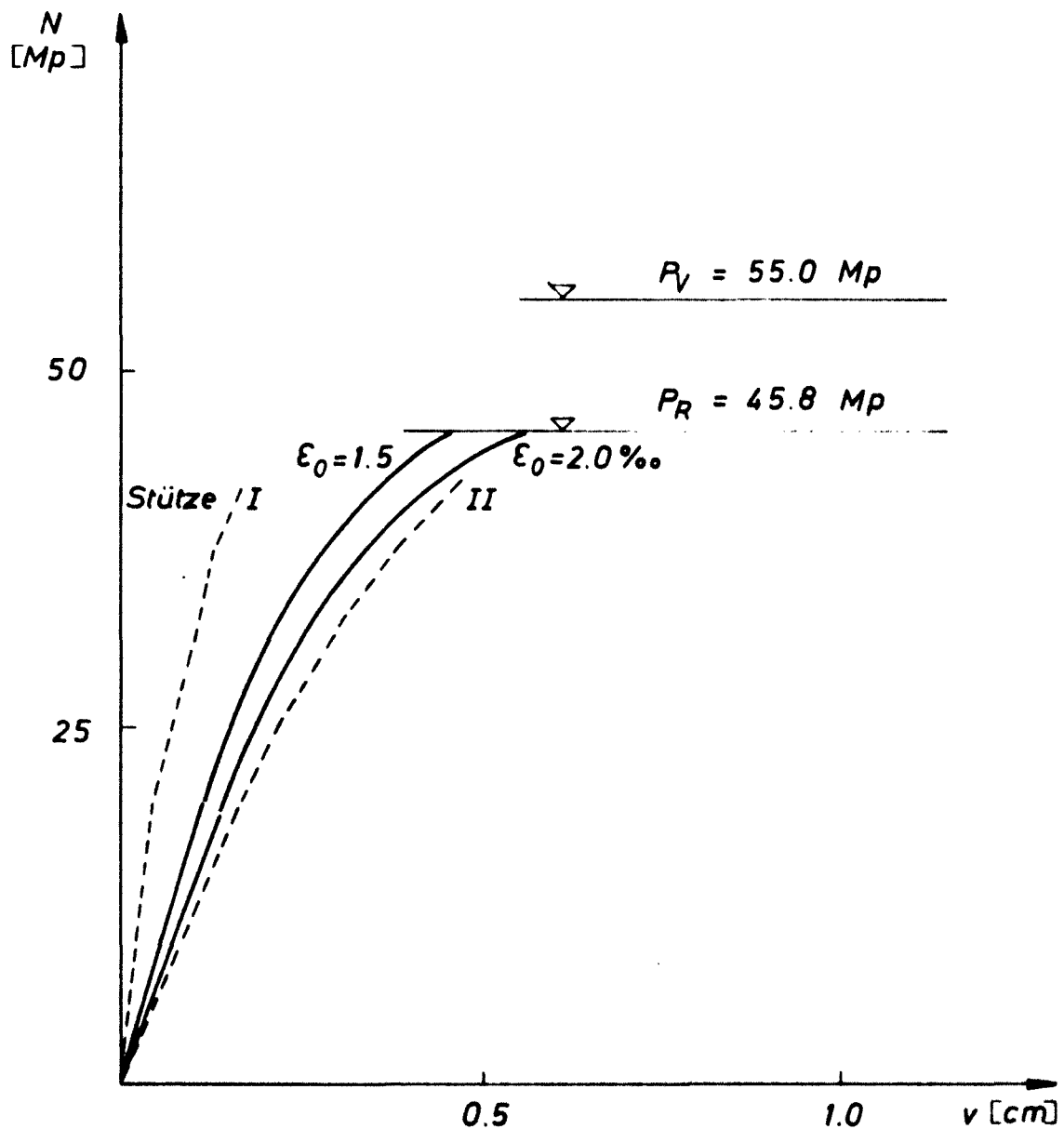
$M = 2:1$

Legende:

----- Rechenwerte

———— Versuchswerte

**Bild 14** Vergleiche der Verformungslinien der Versuchsrahmen mit den  
 rechnerischen Verformungslinien



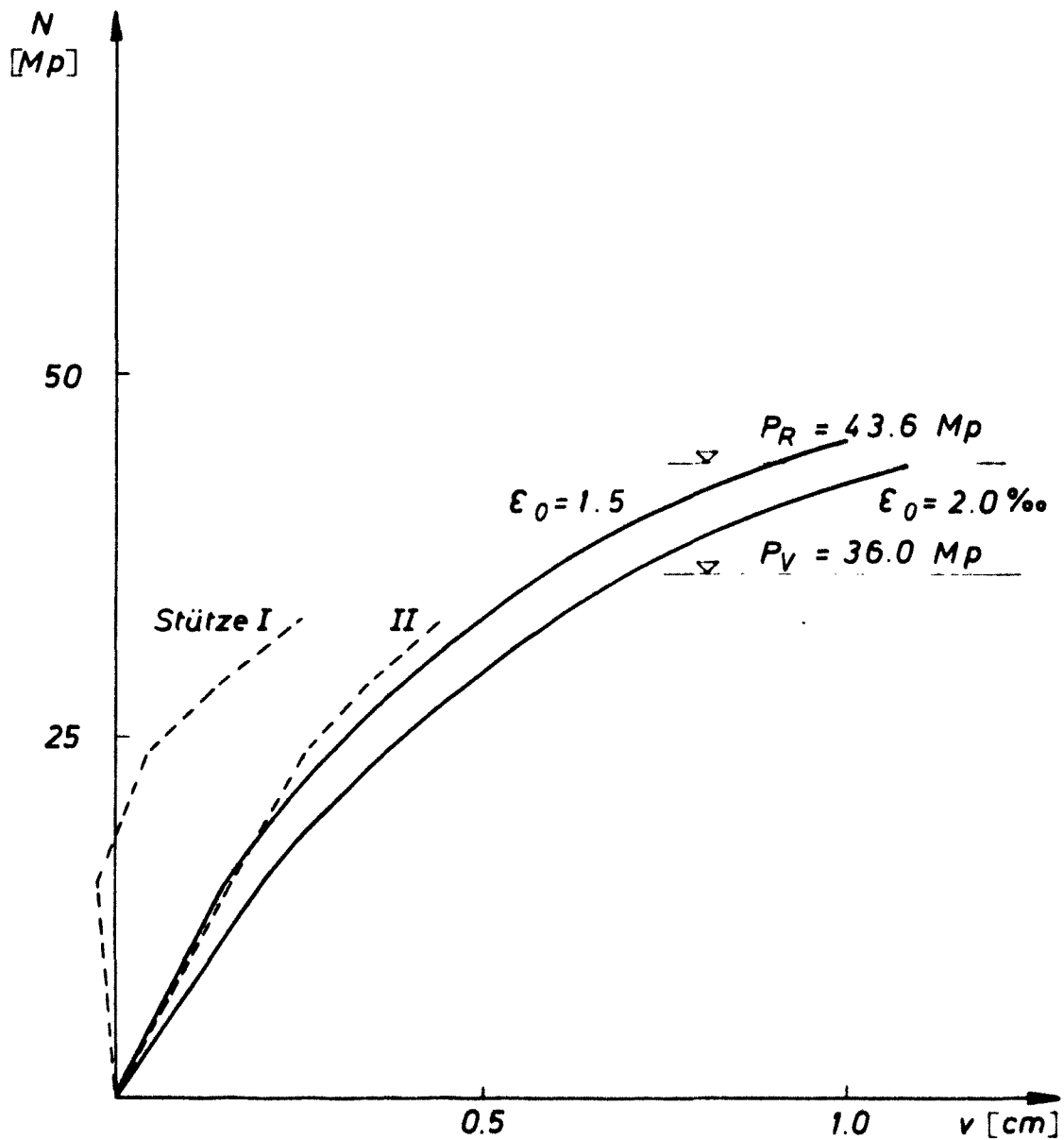
**Legende :**

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 15 Ausbiegung der Stützenmitte  
Versuch 19**



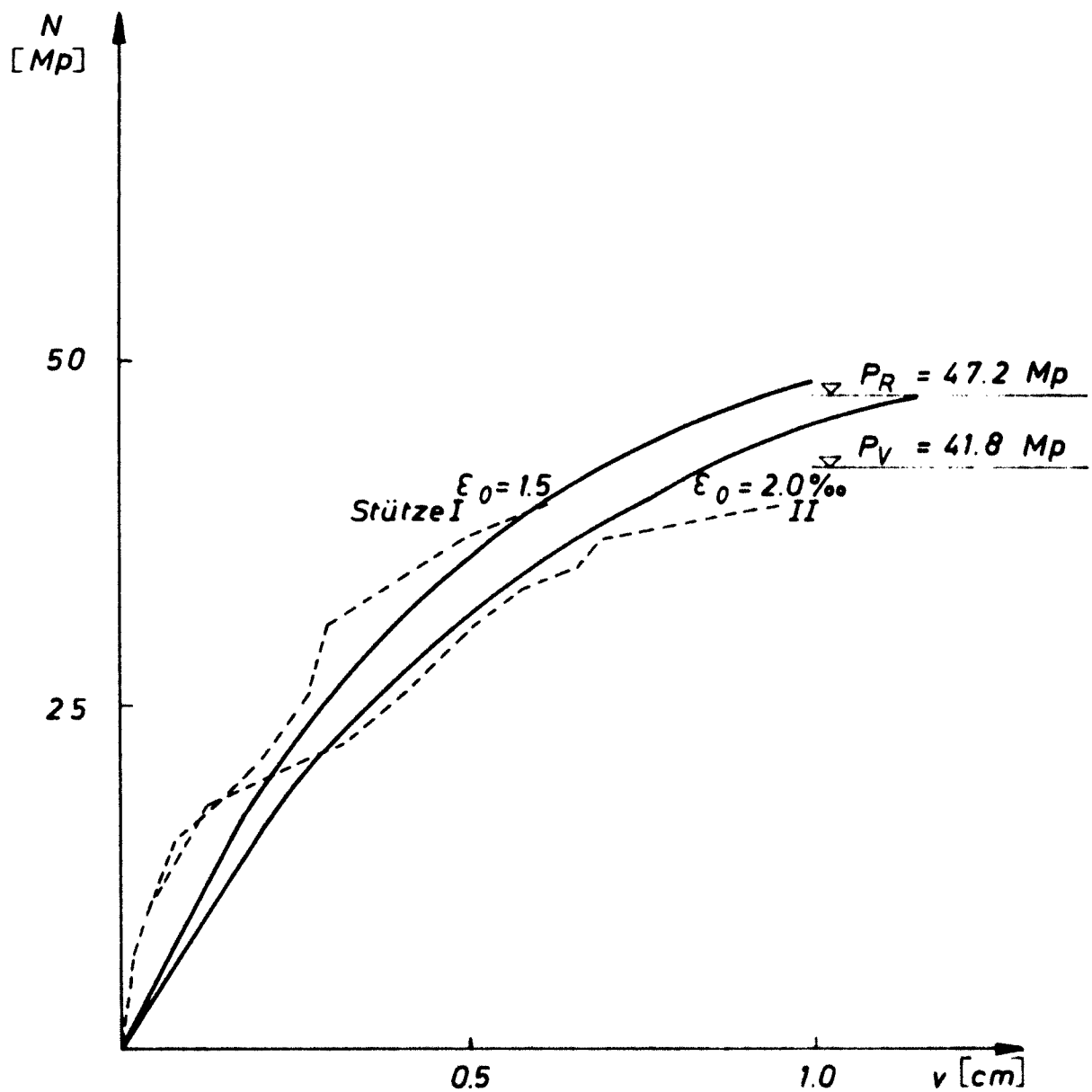


**Legende :**

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 16 Ausbiegung der Stützenmitte  
Versuch 20**

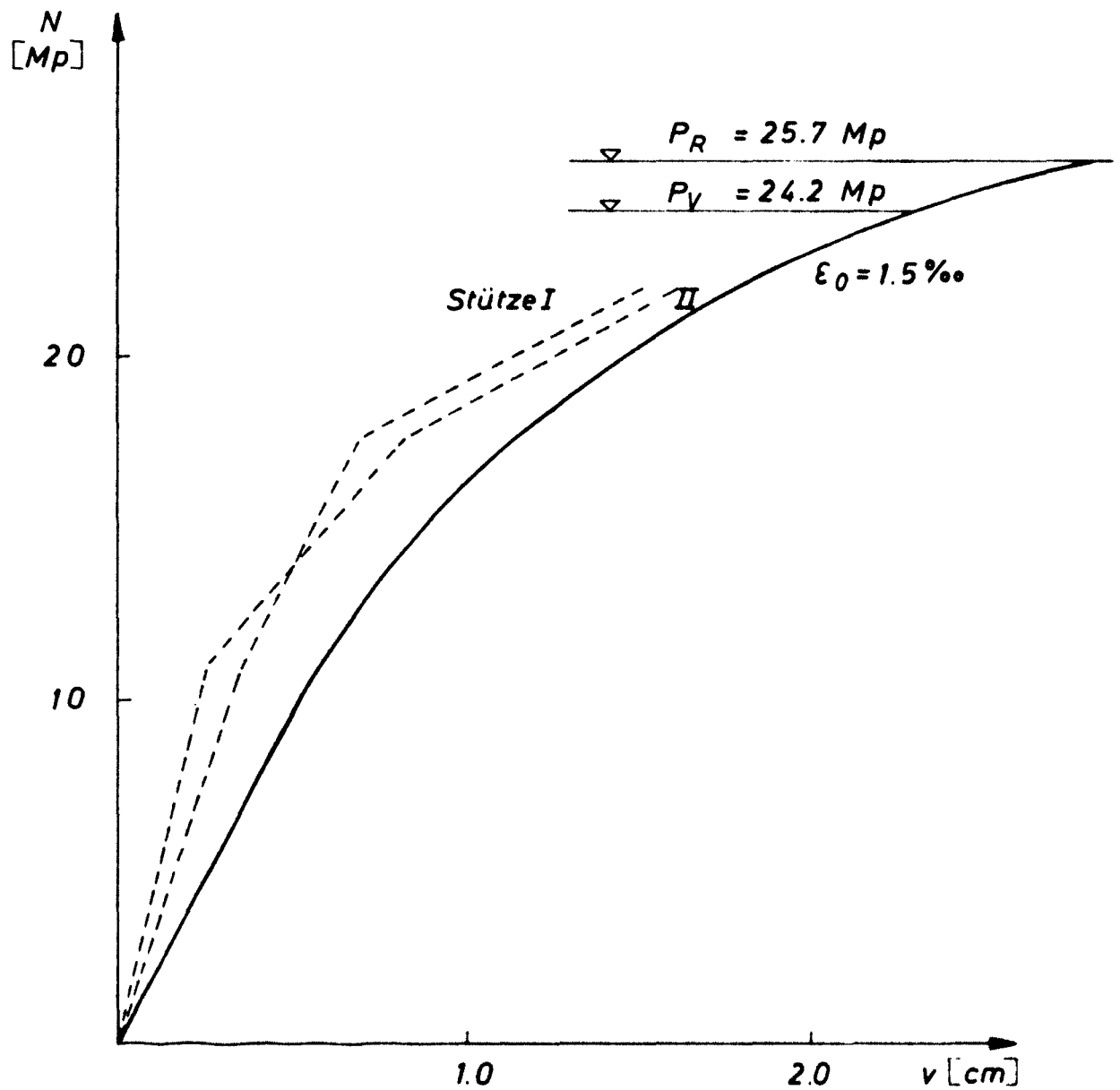


**Legende:**

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 17 Ausbiegung der Stützenmitte**  
**Versuch 20w**

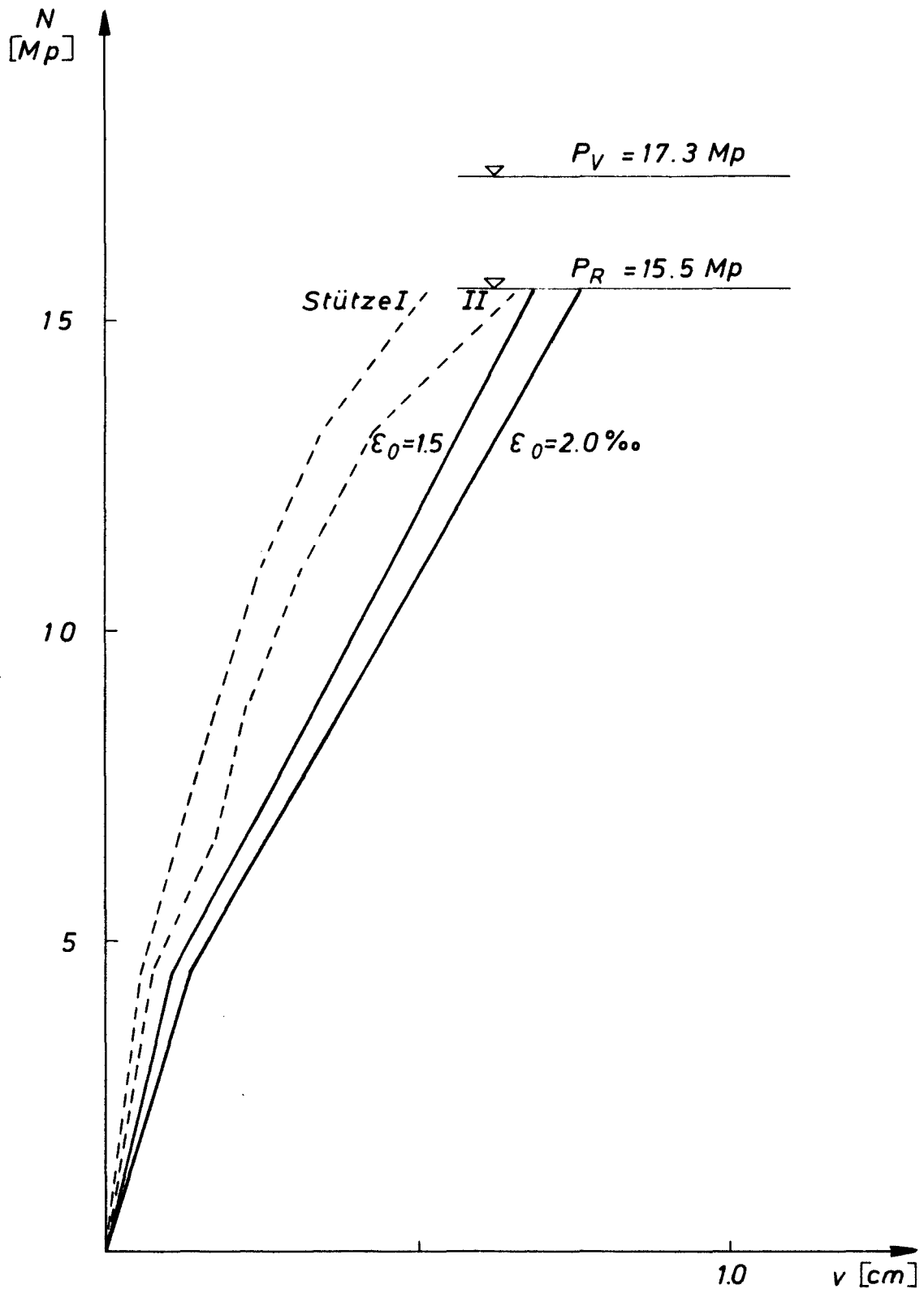


**Legende :**

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 18 Ausbiegung der Stützenmitte  
Versuch 21**

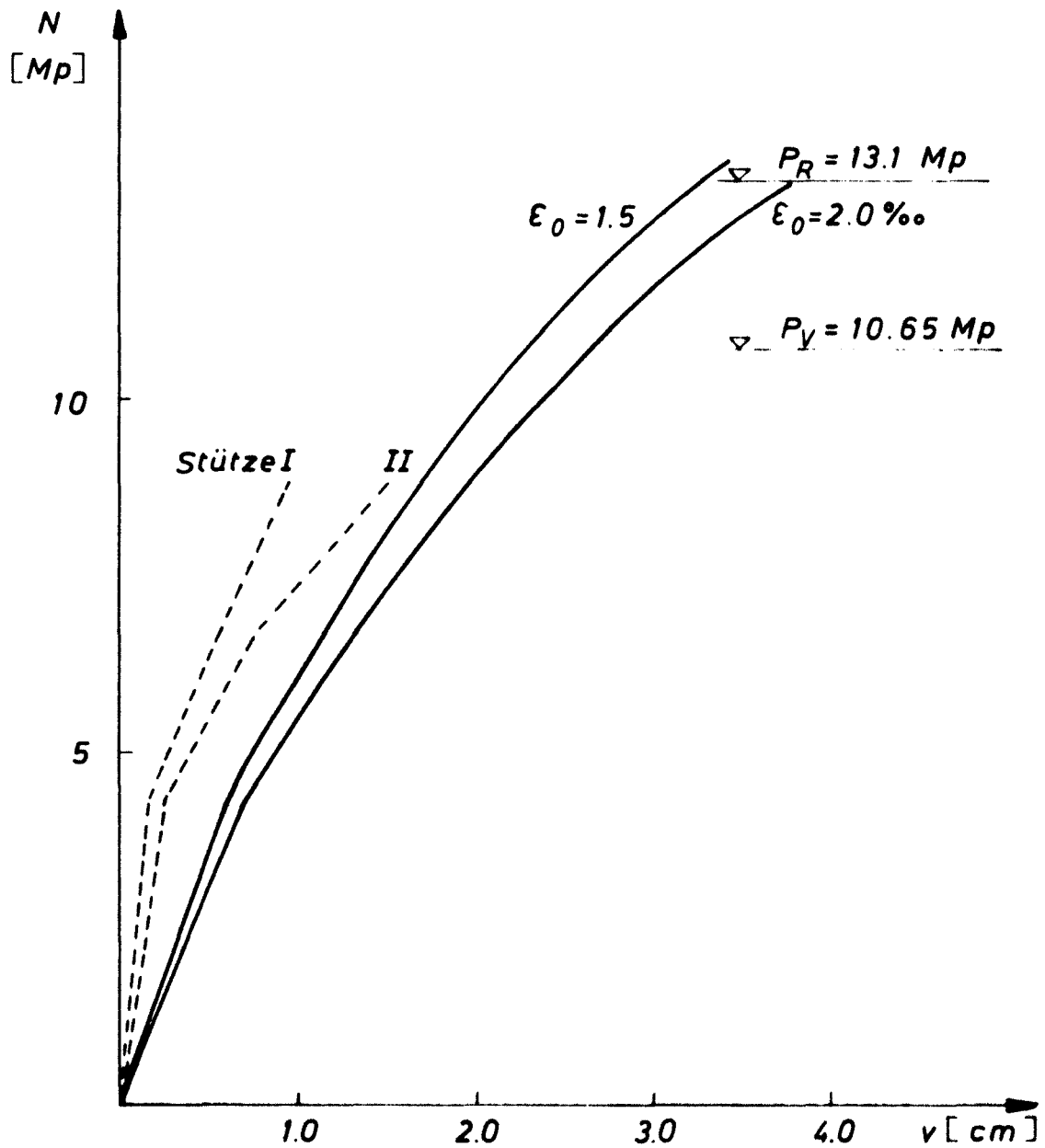


Legende :

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 19 Ausbiegung der Stützenmitte**  
**Versuch 23**

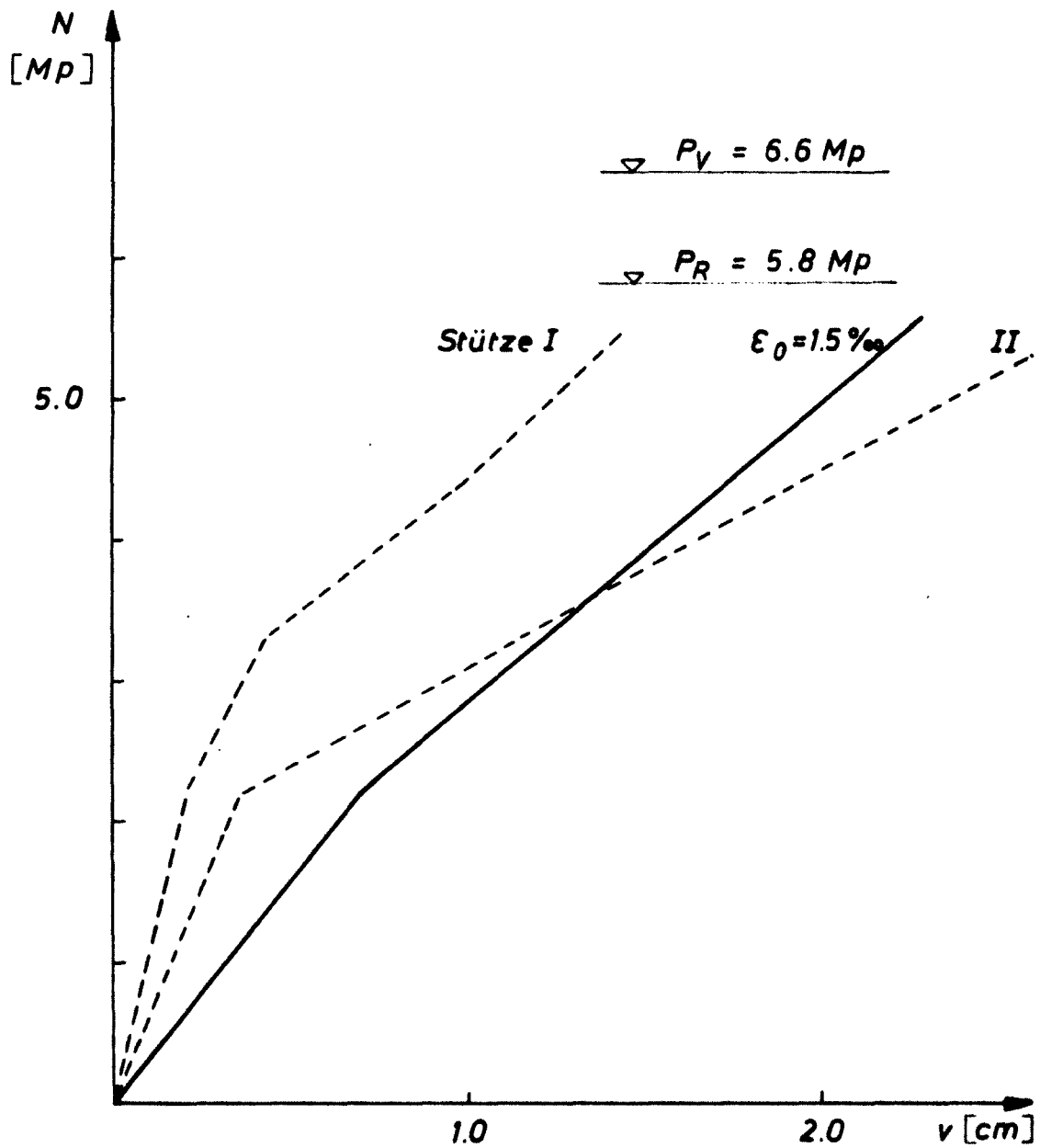


Legende:

----- : Meßwerte

————— : Rechenwerte

**Bild 20 Ausbiegung der Stützenmitte  
Versuch 25**



Legende:

-----: Meßwerte

————: Rechenwerte

**Bild 21 Ausbiegung der Stützenmitte.  
Versuch 26w**

Die rechnerischen und gemessenen Verformungslinien der Versuchsrahmen für bestimmte Belastungsgrade sind auf den Bildern 12 bis 14 verglichen. Die auf die Versuchstraglast bezogene Laststufe, für welche die Verformungslinie dargestellt wurde, mit dem Faktor  $\beta = P/P_v$  angegeben.

Die Bilder 15 bis 21 veranschaulichen die Ausbiegungen der Stützenmitten als Funktionen der Belastungsstufen. Hierbei werden die voneinander abweichenden Meßwerte für die zwei Rahmenstützen sowie die Rechenwerte - zum Teil mit zwei verschiedenen Betonarbeitslinien errechnet - dargestellt.

Auf Grund der in den Bildern 12 bis 21 dargestellten Ergebnisse der Verformungsrechnung können folgende Feststellungen getroffen werden:

- 1) Die Nachrechnungen ergaben grundsätzlich größere Ausbiegungen in der Rahmenebene als die Versuchswerte.
- 2) In unmittelbarer Nähe des Traglastzustandes ist die Übereinstimmung der Versuchs- und Rechendurchbiegungen gut. Dies dürfte darauf zurückzuführen sein, daß bei Annäherung an die Versagenslast das tatsächliche Verformungsverhalten der Stahlbetonbauteile sich zunehmend dem rechnerisch vorausgesetzten annähert (Ausfall der Betonzugzone).

### 3.3 Kritik der Versuche

Die in (6) veröffentlichten Versuche bedürfen einer eingehenden Kritik. Es handelt sich um Rahmen größerer Abmessungen, ( $h = 2,1 - 5,6 \text{ m}$ ,  $l = 2,1 - 5,6 \text{ m}$ ) die in waagerechter Lage betoniert und lotrecht stehend in der Rahmenebene belastet wurden. Wegen der großen Abmessungen sind Ungenauigkeiten in der Belastungsebene aufgetreten, die zu Ausbiegungen aus der Rahmenebene führten. Diese Ausbiegungen wurden zum Teil durch Entlastung, Korrektur an der Belastungsebene und Wiederbelastung behoben, brachten jedoch Einflüsse in die Versuche, die rechnerisch kaum zu verfolgen

sind. Es kann festgestellt werden, daß im allgemeinen die Versuchsrahmen nicht in ihrer Ebene, sondern unter mehr oder weniger zweiachsiger Beanspruchung versagten. Der Versuch 19 W lieferte ein unbrauchbares Ergebnis, das eindeutig mit Auftreten einer Asymmetrie in der Belastung und entsprechender seitlichen Verschiebung mit zusätzlicher Verwindung zu erklären ist. (Siehe Bild 12).

Bezüglich der Erfassung der Verformungen und Längenänderungen sind meßtechnische Unvollkommenheiten zu bemängeln. Dehnungen und Stauchungen der Stiele wurden lediglich bei den fünf Wiederholungsversuchen vorgenommen, direkte Krümmungsmessungen - die z.B. bei neueren amerikanischen Versuchen erfolgten (Ferguson) - überhaupt nicht. Es fehlen oft Verformungswerte im Bereich der letzten 10 % der Tragfähigkeit der Rahmen (zu seltenes Ablesen). Die Weiterverwendung der Versuchswerte für ein exaktes Verformungsstudium ist nur bedingt möglich.

#### 4. Kritische Betrachtungen; Ausblick

Die mit Hilfe des entwickelten Rechenverfahrens vorgenommenen Nachrechnungen der Ergebnisse von (6) bestätigten, daß es mit den getroffenen Annahmen möglich ist, das Stabilitätsverhalten zusammengesetzter Stabsysteme wirklichkeitsnah zu erfassen. Bezüglich der Traglasten sind die rechnerischen Ergebnisse gut, bezüglich der Verformungen nur in Nähe des Traglastzustandes. Die systematischen Abweichungen in der Verformungsberéchnung können nur zum Teil mit versuchstechnischen Unvollkommenheiten erklärt werden. Wesentliche Ursachen dürften in den Rechenannahmen begründet sein. Die wichtigste Vereinfachung in den Rechenannahmen bildet die Vernachlässigung des Einflusses der zwischen den Rissen liegenden Betonzugzone auf die Momenten-Krümmungsbeziehung. Obwohl in (11) ein Korrekturfaktor abgeleitet wurde zur Berücksichtigung dieses Einflusses, mußte in der vorliegenden Arbeit auf die Verwendung dieser Korrektur verzichtet werden, weil sie nur Gültigkeit für

---



reine Biegung bzw. für kleine Normalkräfte mit Biegung hat. Die Steifigkeiten der einzelnen Glieder des zusammengesetzten Systems werden infolge der genannten Vereinfachung in der Berechnung "weicher" vorausgesetzt, als sie in Wirklichkeit sind. Das könnte primär als Ursache der systematischen Abweichungen bei den Verformungen betrachtet werden. Daß trotz dieser Tatsache der Mittelwert der Quotienten aus rechnerischer Traglast zu Versuchstraglast ( $P_R/P_V$ ) höher als 1,0 liegt, kann durch die unter 3 ausführlich behandelten systematischen Versuchsfehler - Ausbiegungen aus der Rahmenebene - erklärt werden. Die Versagensursache bei den Versuchen könnte schiefe Biegung bzw. schiefes Knicken sein, das kleinere Traglasten ergibt als eine einachsige Beanspruchung.

Mit Hilfe der Nachrechnungen konnte jedenfalls gezeigt werden, daß das erstellte Rechenverfahren geeignet ist, die Traglast ebener zusammengesetzter Systeme zu ermitteln. Es kann für diese unter Berücksichtigung sämtlicher Hauptparameter eine "exakte" Traglast definiert werden, die als Bezugsgröße für vergleichende Untersuchungen herangezogen werden kann.

Es ist deshalb beabsichtigt, folgende Untersuchungen in Angriff zu nehmen:

1. Vergleiche der eben definierten "exakten" Traglasten mit den nach DIN 1045 Entwurf errechneten zulässigen Lasten. In diesen Untersuchungen könnte die Verwendbarkeit des "Ersatzstabverfahrens" auf Stahlbeton überprüft werden, insbesondere die Richtigkeit der nach der Elastizitätstheorie errechneten "Knicklängen".
2. Weiterhin wird ein Näherungsverfahren angestrebt, das die Einflüsse der anschließenden Biegeglieder auf die Druckglieder möglichst unmittelbar miteinfaßt und damit dem tatsächlichen Tragverhalten näherkommt als ein "Ersatzstabverfahren".

3. Es wird versucht, auch hochgradig statisch unbestimmte Rahmensysteme durch Analyse von Ausschnitten (z.B. Rahmenknoten mit anschließenden Stielen und Riegeln) hinsichtlich ihrer Traglast zu beurteilen.

Mit den hier vorgeschlagenen Untersuchungen könnte das tatsächliche Tragverhalten zusammengesetzter Systeme unter vertikaler Belastung geklärt werden, einschließlich der aus dem Zusammenwirken mit den Biegegliedern herrührenden und bisher kaum erfaßten Einflüssen.

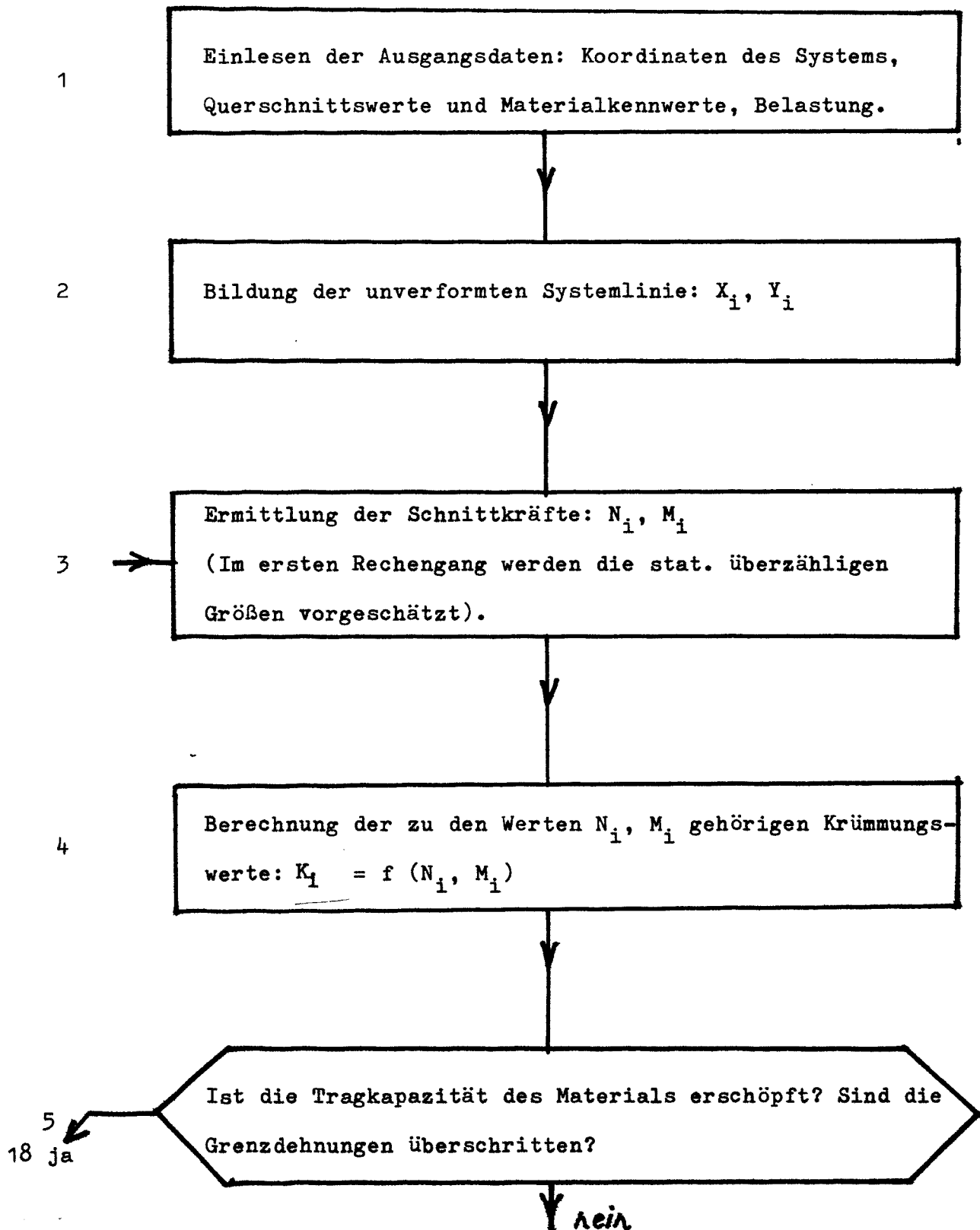
Das gleichzeitige Wirken lotrechter und waagerechter Lasten könnte ebenso untersucht werden; dies führt allerdings zu einem sicherheitstheoretischen Problem, weil die Annahmen über Größe und Art des Auftretens der Horizontalkraft die Traglast maßgebend beeinflussen. Hier könnte die Durchrechnung einiger Beispiele unter Annahme einer plötzlich zusätzlich zur lotrechten Gebrauchslast auftretenden Horizontallast weiterführen. Diese Fragen bedürfen auf jeden Fall einer getrennten und eingehenden Untersuchung, die den Rahmen dieses Forschungsvorhabens überschreitet.

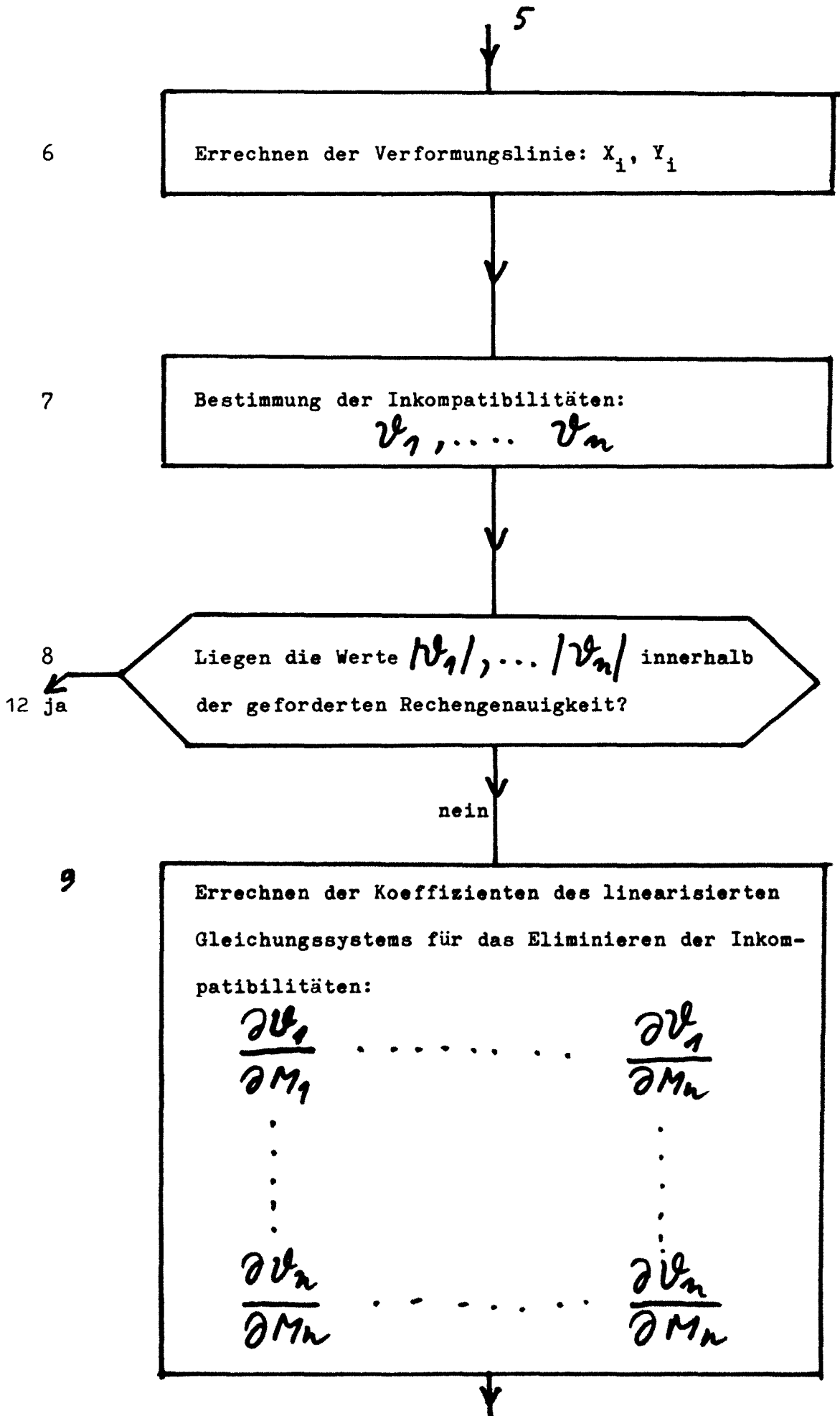
## 5. Zusammenfassung

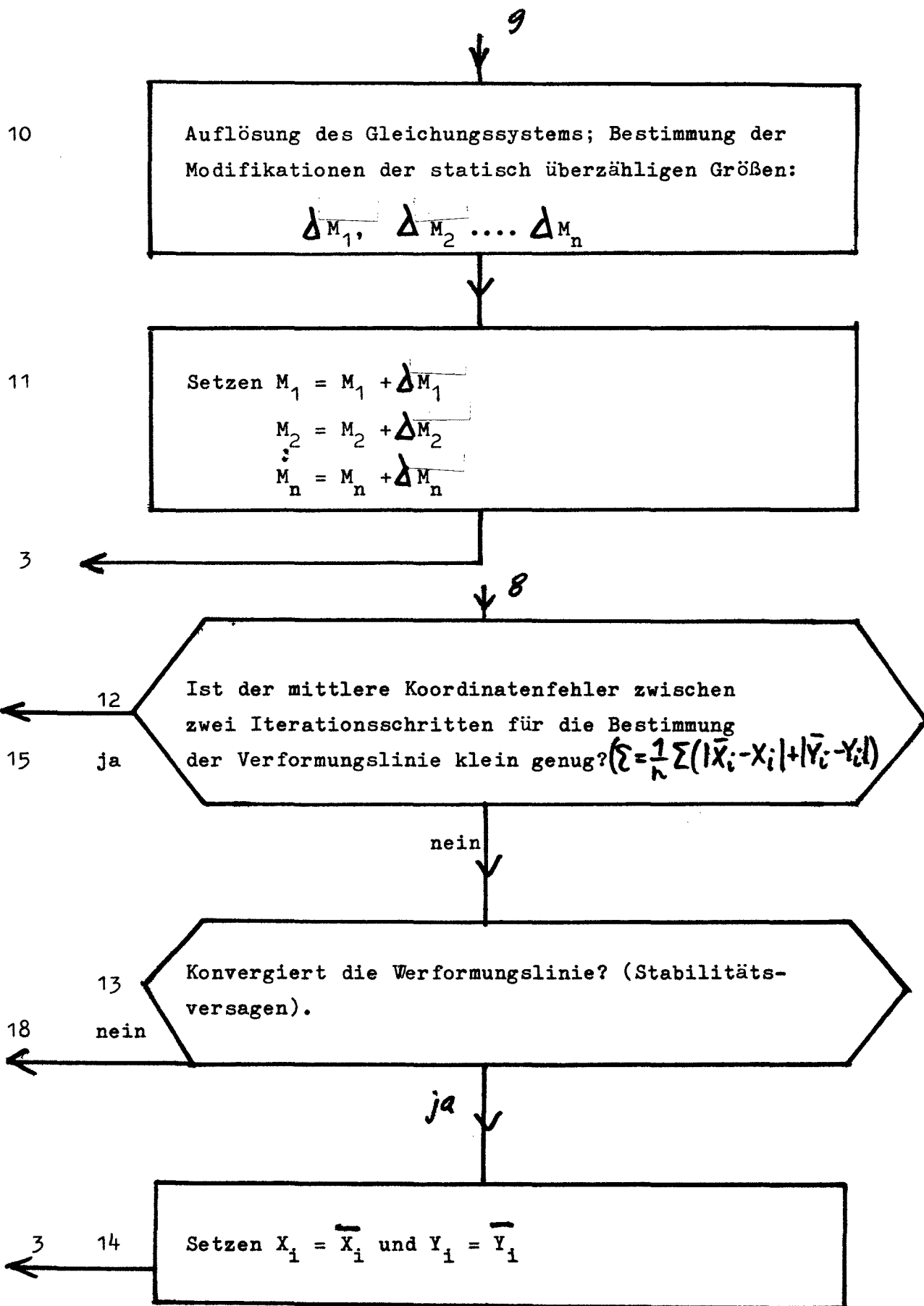
Zur Bestimmung der Traglast zusammengesetzter, ebener Systeme wurde ein Rechenverfahren entwickelt. Das Verfahren beruht auf einer wirklichkeitsnahen Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung. Die verwendeten Rechengrundlagen wurden mit Hilfe von Versuchsnachrechnungen überprüft und bestätigt. Der Quotient aus rechnerischer Traglast zu Versuchstraglast ergab einen Mittelwert von 1,05 bei einem Variationskoeffizienten von 13,7 %. Der errechnete Verformungszustand stimmte mit dem gemessenen in der Nähe der Traglast gut überein.

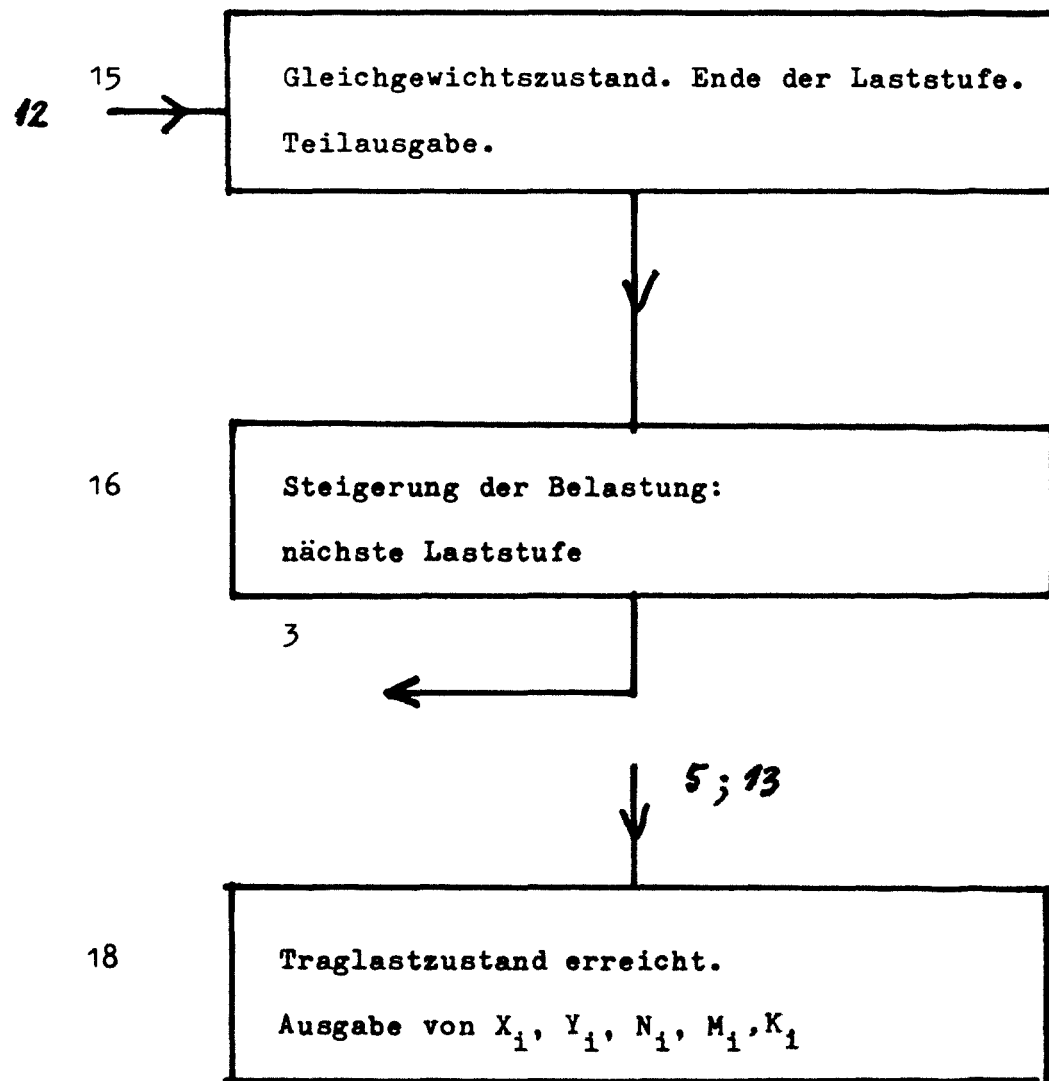
## A n h a n g

### Vereinfachtes Flußdiagramm des Rechenprogramms









## **2. Teil**

## Inhaltsverzeichnis

### 1. Tragverhalten einfeldriger Stahlbetonrahmen

#### 1.1 Nichtlineares Verformungsverhalten, grundsätzliches Tragverhalten

##### 1.1.1 Unverschiebliche Systeme

##### 1.1.2 Verschiebliche Systeme

### 2. Traglastberechnungen für unverschiebliche Zweigelenkrahmen

#### 2.1 Einfluß der Hauptparameter auf die Systemtraglast

#### 2.2 Stabsteifigkeiten der Druck- und Biegeglieder des unverschieblichen Systems

#### 2.3 Exemplarische Traglastberechnungen für verschiebliche Zweigelenkrahmen

### 3. Einfluß der Belastungsgeschichte

#### 3.1 Einführung

#### 3.2 Anwendung globaler und differenzierter Sicherheitsbeiwerte

#### 3.3 Anwendung des "Ersatzstabverfahrens"

#### 3.4 Schiefstellung des Systems

### 4. Rechentechnische Probleme

### 5. Zusammenfassung



## II

### L I T E R A T U R A N G A B E N

- [1] Basler, E. "Untersuchungen über den Sicherheitsbegriff von Bauwerken"  
Schweizer Archiv (1961) S. 133
- [2] Kordina, K. "Zur Anwendung der Sicherheitstheorie bei Stabilitätsuntersuchungen im Stahlbetonbau"  
aus "Theorie und Praxis des Stahlbetonbaues"  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn
- [3] Ferry-Borges, J. "Structural Safety"  
Volume 1 (1968) und  
Volume 2 (1971)  
CEB, Bulletin d'Information No , No 78
- [4] "Internationale Richtlinien zur Berechnung und Ausführung von Betonbauwerken"  
CEB, Zweite Auflage, Juni 1970
- [5] Kordina, K.  
u. Quast, U. "Bemessung von schlanken Bauteilen-Knicksicherheitsnachweis"  
Betonkalender 1971  
Wilhelm Ernst & Sohn
- [6] Lewandowski, R. "Beurteilung von Bauwerksfestigkeiten an Hand von Betongütekübeln und -bohrproben".  
Dissertation, TU Braunschweig, 1970
- [7] "Bemessung von Beton- und Stahlbetonbauteilen"  
Heft 220 des DAfStb,  
Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1972

## 1. Tragverhalten einfeldriger Stahlbetonrahmen

Im 1. Teil dieses Berichtes wurden die Grundlagen der Traglastbestimmung von Stahlbeton-Rahmensystemen behandelt. Hierbei wurde eine Rechenmethode entwickelt, mit deren Hilfe die Systemtraglast weitgehend wirklichkeitsnahe bestimmt werden konnte.

Diese Grundlagen wurden zur Berechnung von Traglastdiagrammen für das einfachste, einfeldrige Rahmensystem, den Zweigelenrahmen, herangezogen. Die Auswahl dieses Systems erfolgte aus zwei Gründen:

- Das System ist nur einfach statisch unbestimmt, dennoch erlaubt es das Studium der einspannenden Wirkung der Riegel bei noch verhältnismäßig erträglichem Rechenaufwand.
- Die Traglast dieses Systems kann als identisch mit der Kollapslast angesehen werden. - Bei Tragsystemen mit höherer statischer Unbestimmtheit ist dies nicht ohne weiteres möglich.

Bei der Bestimmung der Traglast wurde das System unter steigender Belastung untersucht und dabei die zu den einzelnen Laststufen gehörigen Schnittkräfte und Verformungskomponente am verformten System festgehalten. Die Laststeigerung wurde grundsätzlich proportional zu allen Lastkomponenten gewählt (gemeinsamer Lastfaktor), eine Abweichung hiervon ist lediglich in Abschnitt 3.1 zu finden.

Ergänzend zum 1. Teil dieses Berichtes lagen der Berechnung noch folgende, weitere Annahmen zugrunde:

- 1.) Stabweise konstanter Rechteckquerschnitt
- 2.) Symmetrische und gleichbleibende Bewehrung der Stiele
- 3.) Idealisierte Bewehrungsführung von direkt belasteten Riegeln. Die Riegelzugbewehrung liegt mit konstanter Größe

im Bereich der Zugfaser, die Druckbewehrung analog im Bereich der Druckfaser, s. Bild 1.

- 4.) Symmetrische und gleichbleibende Bewehrung der Riegel mit indirekter Biegebeanspruchung (verschiebliches System mit Knotenlasten), Auslenkungsmöglichkeit des Systems nach beiden Seiten.

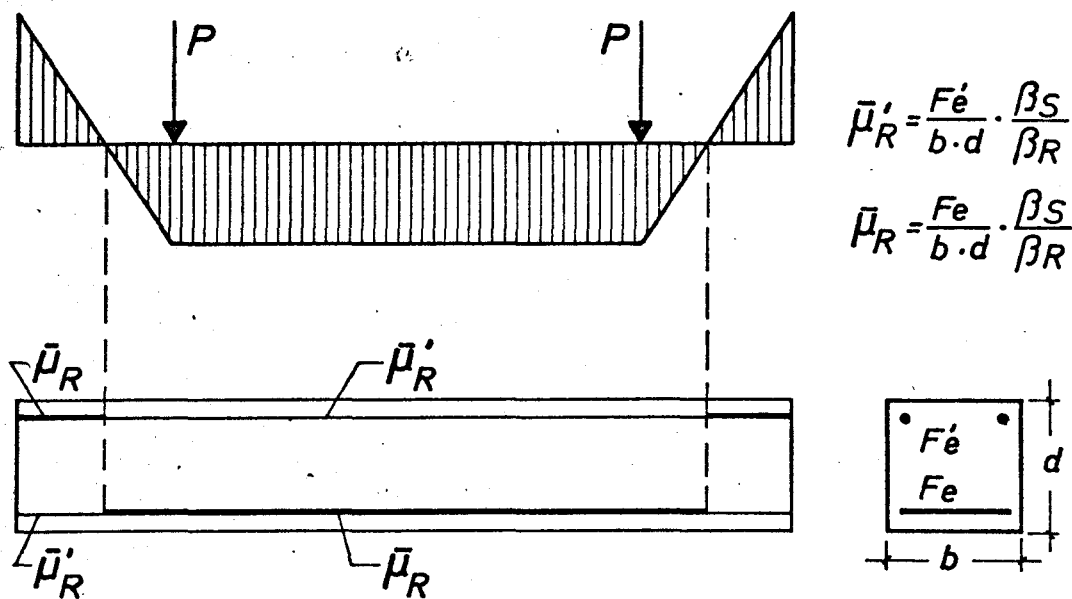


Bild 1: Anordnung der Bewehrung unmittelbar belasteter Riegel

Die in den folgenden Rechnungen variierten wesentlichen Einflußgrößen werden wie folgt zusammengestellt:

1. Baustoffkennwerte	$\beta_S =$	42 000	Mp/m <sup>2</sup>
	$\beta_R =$	2 550	"
	und	2 100	"

(im übrigen wie im 1. Teil dieses Berichtes)

2. Planmäßig bezogene Lastausmitten der Rahmenstiele:

$$e/d = 0,05; 0,10; 0,30; 1,00$$

3. Bezogene Stiellängen  $h/d = 00, 10, 20, 30, 50$

4. Bezogene Riegellängen  $l/d = 10, 20, 40$

5. Mechanischer Bewehrungsgrad der Stiele:

$$\bar{\mu}'_S + \bar{\mu}_S = 0,165; 0,20; 0,33; 0,40; 0,80$$

6. Mechanischer Bewehrungsgrad der Riegel:

$$\bar{\mu}'_R + \bar{\mu}_R = 0,4; 0,5; 1,0; 1,20$$

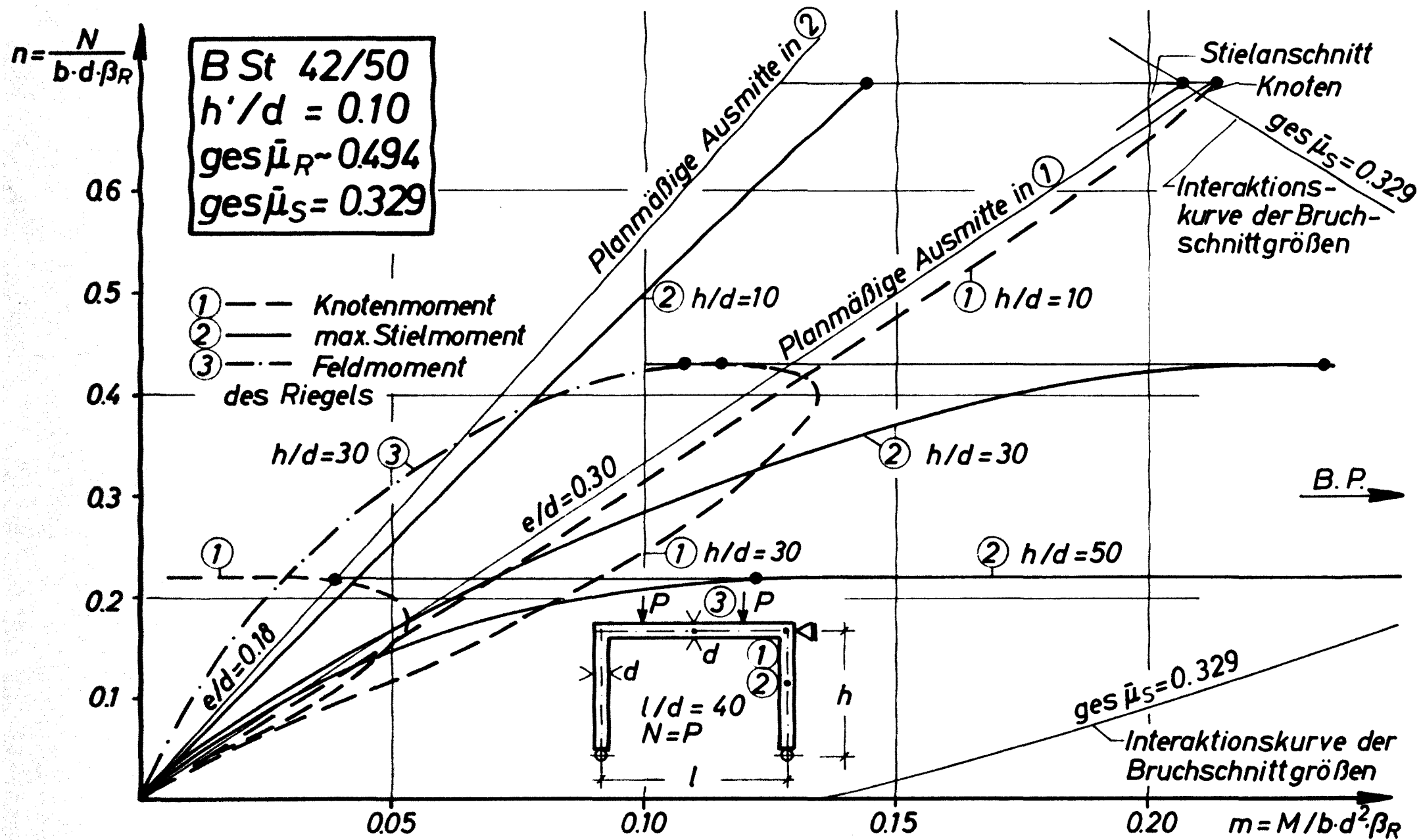
7. Bewehrungslage:  $h'/d = 0,10$

Weitere Parameter wie System-Lastanordnung, Belastungsgeschichte u.ä. werden in den entsprechenden Abschnitten erläutert.

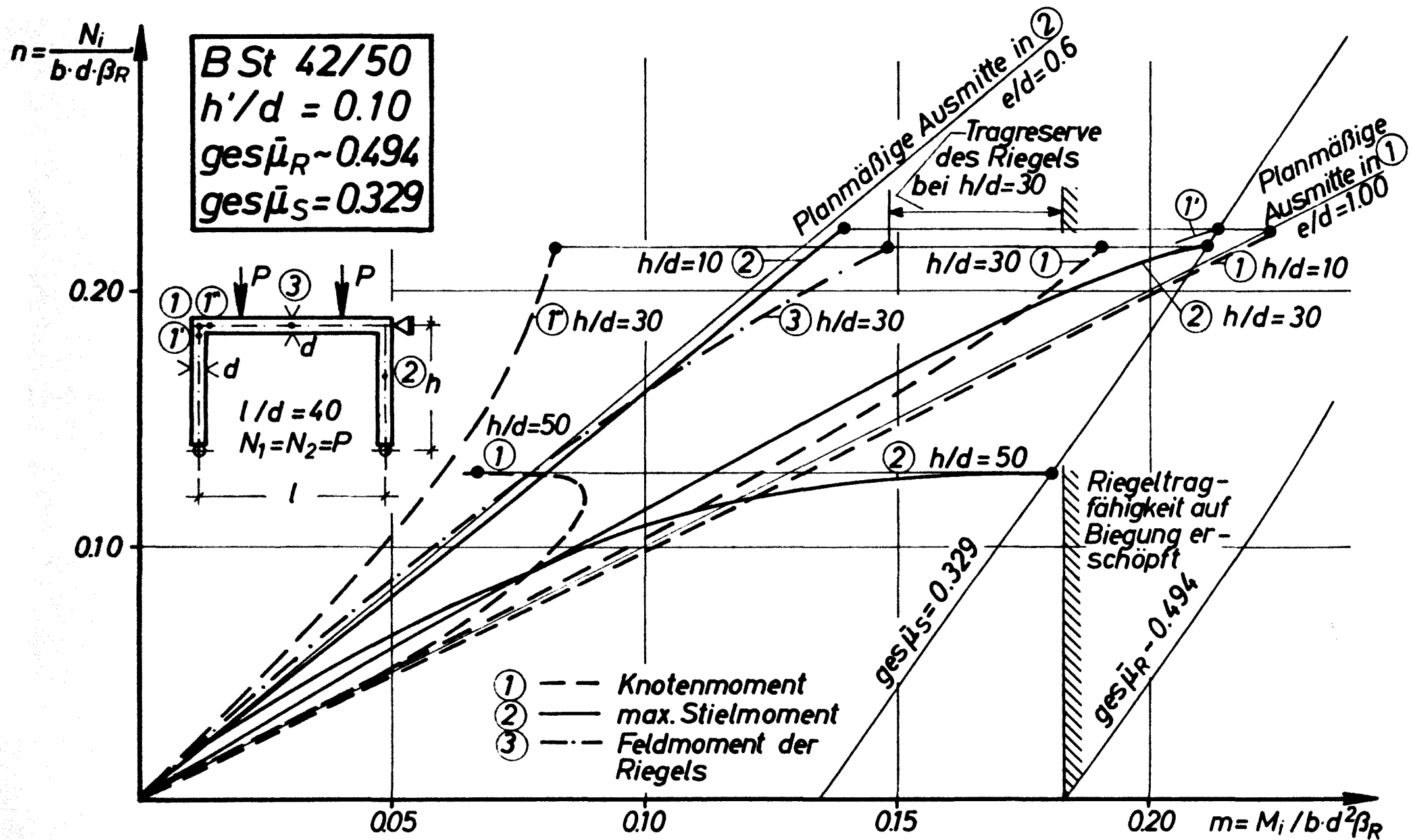
1.1 Nichtlineares Verformungsverhalten, grundsätzliches Tragverhalten

Das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonrahmen wird durch Überlagerung physikalischer (materialbedingter) und geometrischer (systembedingter) Nichtlinearitäten charakterisiert. (d.h.: Zwischen Belastungen und deren Wirkungen - Beanspruchungen, Verformungen - besteht keine Proportionalität.) Dieses grundsätzliche Verhalten bestimmt und begrenzt die anwendbaren Untersuchungsmethoden. Im vorliegenden Abschnitt dieser Arbeit wird eine strenge Lösung des Verformungsproblems angestrebt, in der die physikalische Nichtlinearität durch Anwendung streng errechneter Momenten-Krümmungsbeziehungen und die geometrische durch Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System erfaßt wird. (Rechenverfahren siehe im 1. Teil des Berichtes).



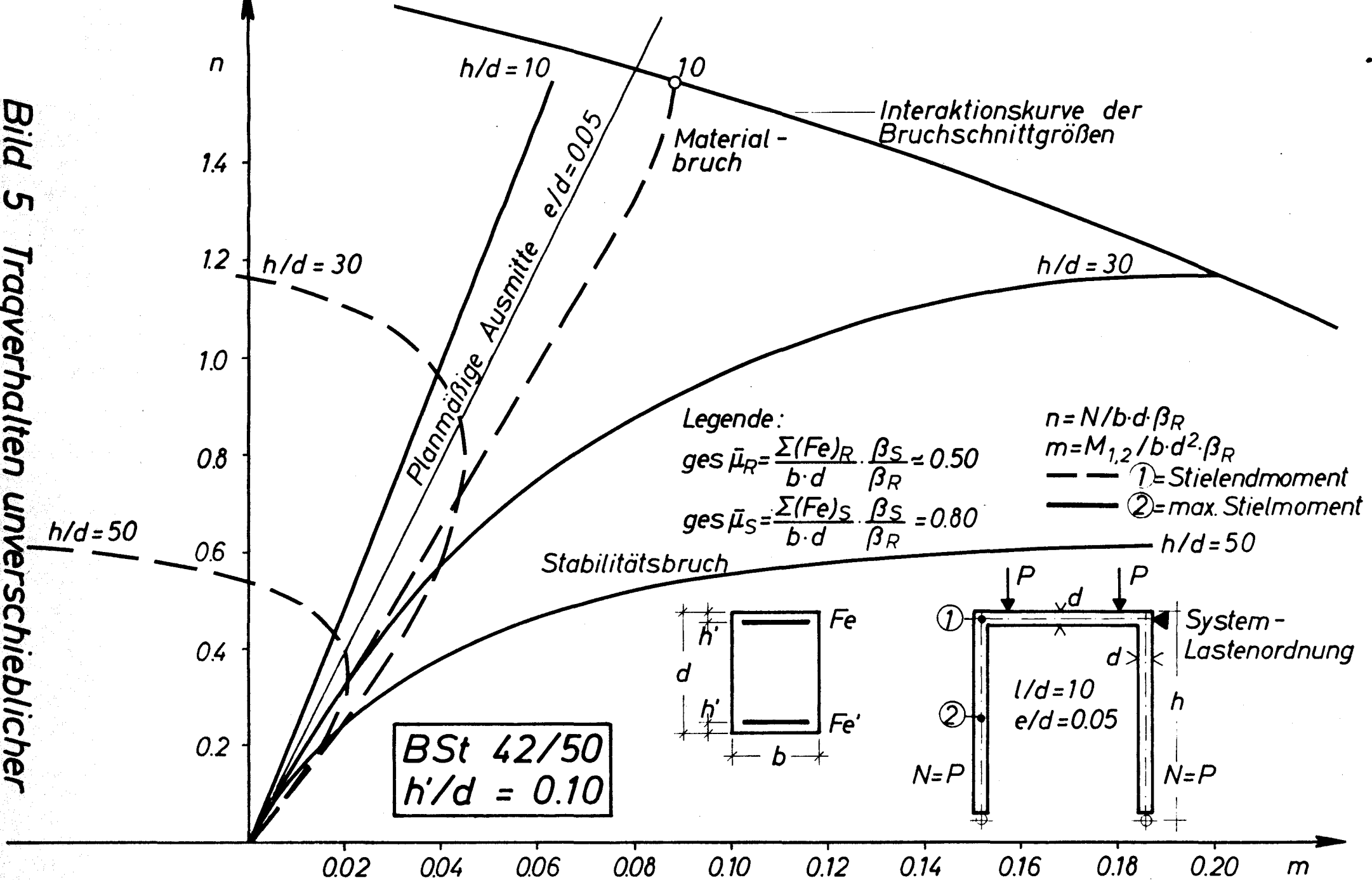


**Bild 3** Tragverhalten unverschieblicher Zweigelenkrahmen. Mittlere Ausmitte :  $e/d = 0.30$



**Bild 4** Tragverhalten unverschieblicher Zweigelenrahmen. Große Ausmitte :  $e/d = 1.00$

Bild 5 Tragverhalten unterschiedlicher Zweigelenrahmen





Im folgenden wird das grundsätzliche Tragverhalten von Stahlbetonrahmen an Hand von einigen Traglastberechnungen an typischen Systemlastanordnungen verdeutlicht.

#### 1.1.1 Unverschiebliche Systeme

In den Bildern 2 - 5 ist das charakteristische Tragverhalten von unverschieblichen Zweigelenkrahmen unter symmetrischer, lotrechter Belastung der Riegel dargestellt.

Aufgetragen wurde die Momentenbeanspruchung in typischen Querschnitten in Abhängigkeit von der Belastung. In der Darstellung entspricht dem linearen Verhalten (Theorie I. Ordnung) eine Gerade, deren Neigung die planmäßige Ausmitte in den betreffenden Querschnitten bedeutet.

Eine wesentliche, charakteristische Eigenschaft aller in den Bildern 2 - 5 dargestellten Traglastberechnungen ist, daß die Knotenmomente (Querschnitt 1) mit zunehmender Belastung geringer werden, hingegen die Momente in der Stielmitte (Querschnitt 2) sich vergrößern. Die Feldmomente der Riegel vergrößern sich ähnlich wie die in der Stielmitte. (Querschnitt 3)

Die mechanische Erklärung dieses Verhaltens läßt sich am Beispiel eines Zweigelenkrahmens mit konstantem Riegel- und Stiel-Querschnitt aus Hook'schem Idealbaustoff erbringen. Das Knotenmoment nach Theorie II. Ordnung unter Voraussetzung konstanter Stabsteifigkeiten ergibt sich nach Bild 6 zu:

$$M^{II} = - \frac{\int M_0 M_1 ds}{\int M_1^2 ds} + \frac{\int M_1 M_2 ds}{\int M_1^2 ds} \quad (1)$$

Da aber das erste Glied der rechten Seite das Moment nach Theorie I. Ordnung bedeutet, kann geschrieben werden:

$$M^{II} = -M^I + \frac{\int M_1 M_2 ds}{\int M_1^2 ds} \quad (2)$$

Die Gl. (2) zeigt, daß bei unverschieblichen Systemen das Knotenmoment der Stiele infolge der Stielausbiegungen stets abgebaut wird. Ähnliche Überlegungen zeigen bei verschieblichen Systemen, daß das maximale Stielmoment immer am Knoten auftritt.

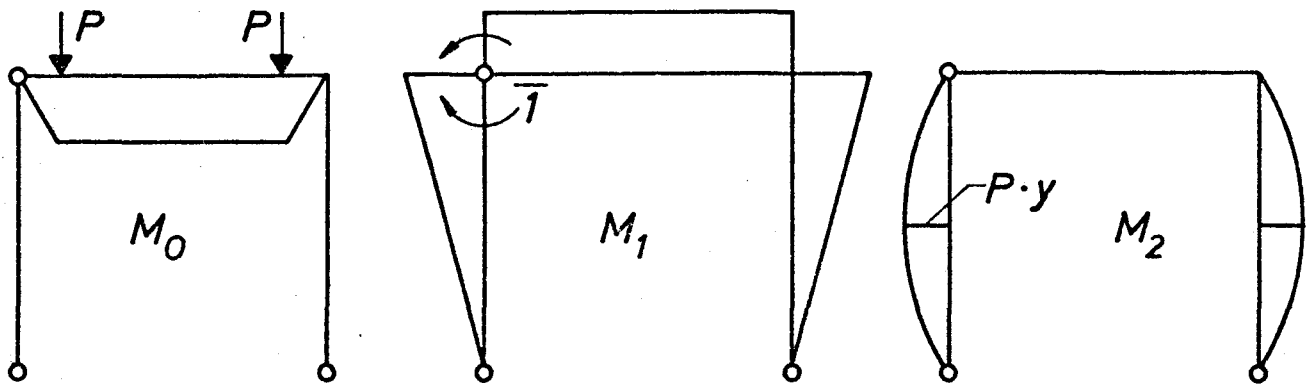
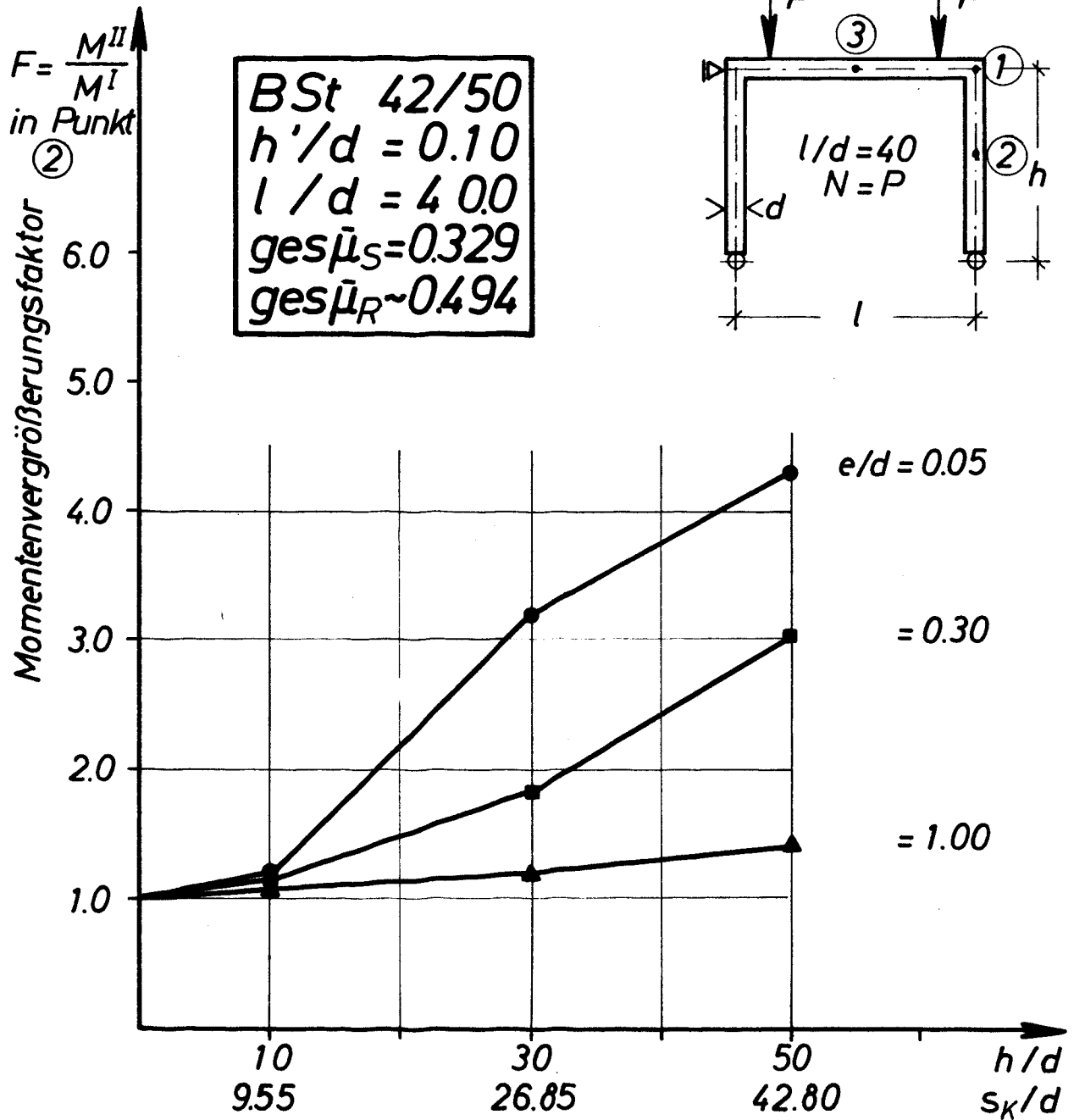


Bild 6: Mechanische Deutung der Momentenumlagerung nach Theorie II. Ordnung.

Das Beispiel zeigt, daß die primäre Ursache der Momentenumlagerung systembedingt ist, der unelastische Baustoff steigert lediglich diesen Effekt. Die Bilder 2 - 5 erhärten diese Feststellung. Deutlich ist zu erkennen, daß die bezogene Stiellänge  $h/d$  erwartungsgemäß als wesentlicher Parameter das Maß der Abweichung vom linearen Verhalten bestimmt. Dieses Maß ist jedoch auch von der planmäßigen Ausmitte der Druckglieder stark beeinflusst, wie dies dem Bild 7 zu entnehmen ist. Hier wurde das Verhältnis der Momente nach Theorie I. Ordnung und II. Ordnung im Traglastzustand

$$F = M^{II}/M^I \quad (3)$$

dargestellt.



**Bild 7** Momentenvergrößerungsfaktoren unverschieblicher Zweigelenkrahmen

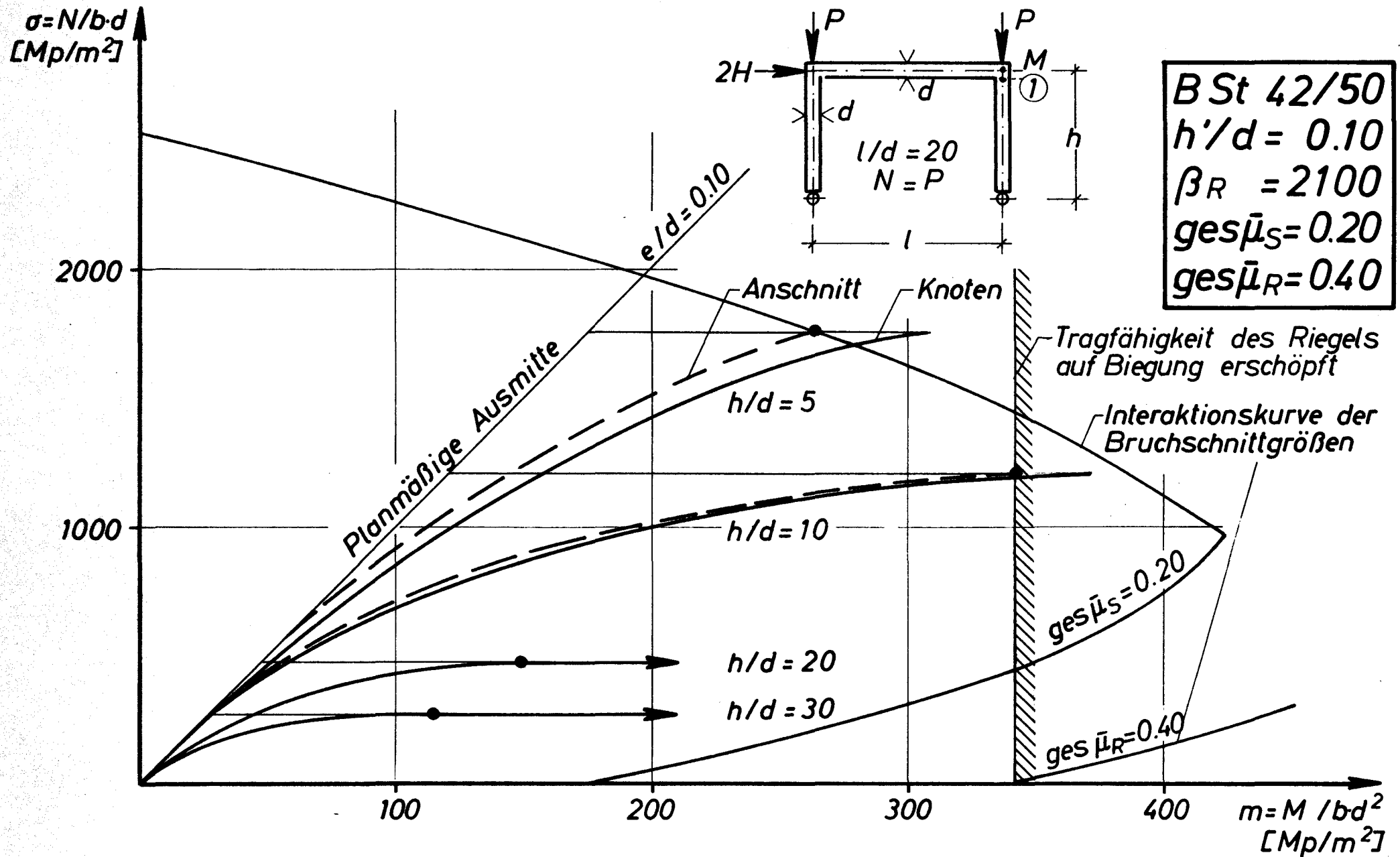
Obwohl die Größe des Faktors  $F$  aus rechentechnischen Gründen oft nicht genau errechnet werden kann, (vgl. Bilder 2 - 5) lassen sich dem Bild 7 dennoch folgende Erkenntnisse entnehmen:

- Die Größe von  $F$  nimmt mit zunehmenden planmäßigen Ausmitten der Druckglieder stark ab.
- Im Bereich geringer Stielschlankheiten ( $h/d \lesssim 10$ ) wird die Momentenvergrößerung gering ( $F \leq 1,20$ ); sie übt auf die Traglast keinen abmindernden Einfluß aus.

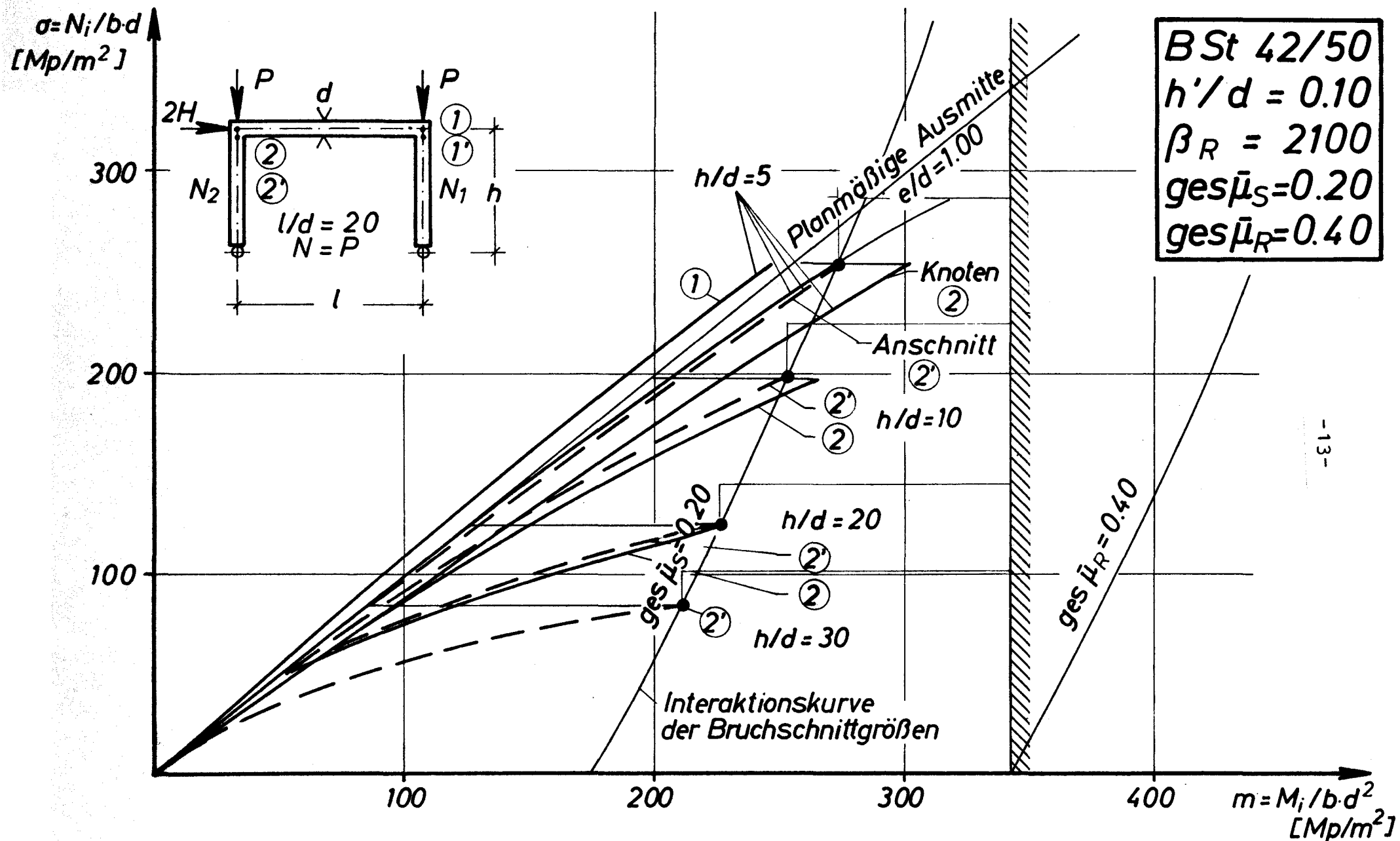
Die Erklärung hierzu liegt darin, daß zunehmende planmäßige Stielausmitten die Größe der aufnehmbaren Normalkraft  $N$  und damit den absoluten und relativen Einfluß des Zusatzmomentes aus Theorie II. Ordnung  $N \cdot y$  stark abmindern. Eine entgegengesetzte Wirkung entsteht allerdings infolge Steifigkeitsminderung durch stärkeres Aufreißen der Querschnitte; dieser Effekt ist jedoch geringer als der des Zusatzmomentes. Erst bei sehr hohen Stielschlankheiten -  $h/d \geq 50$  - tritt eine deutlichere Momentenvergrößerung ein, die aber durch die Tragfähigkeit der Stiele im Zugbruchbereich der Iterationskurve begrenzt wird.

---

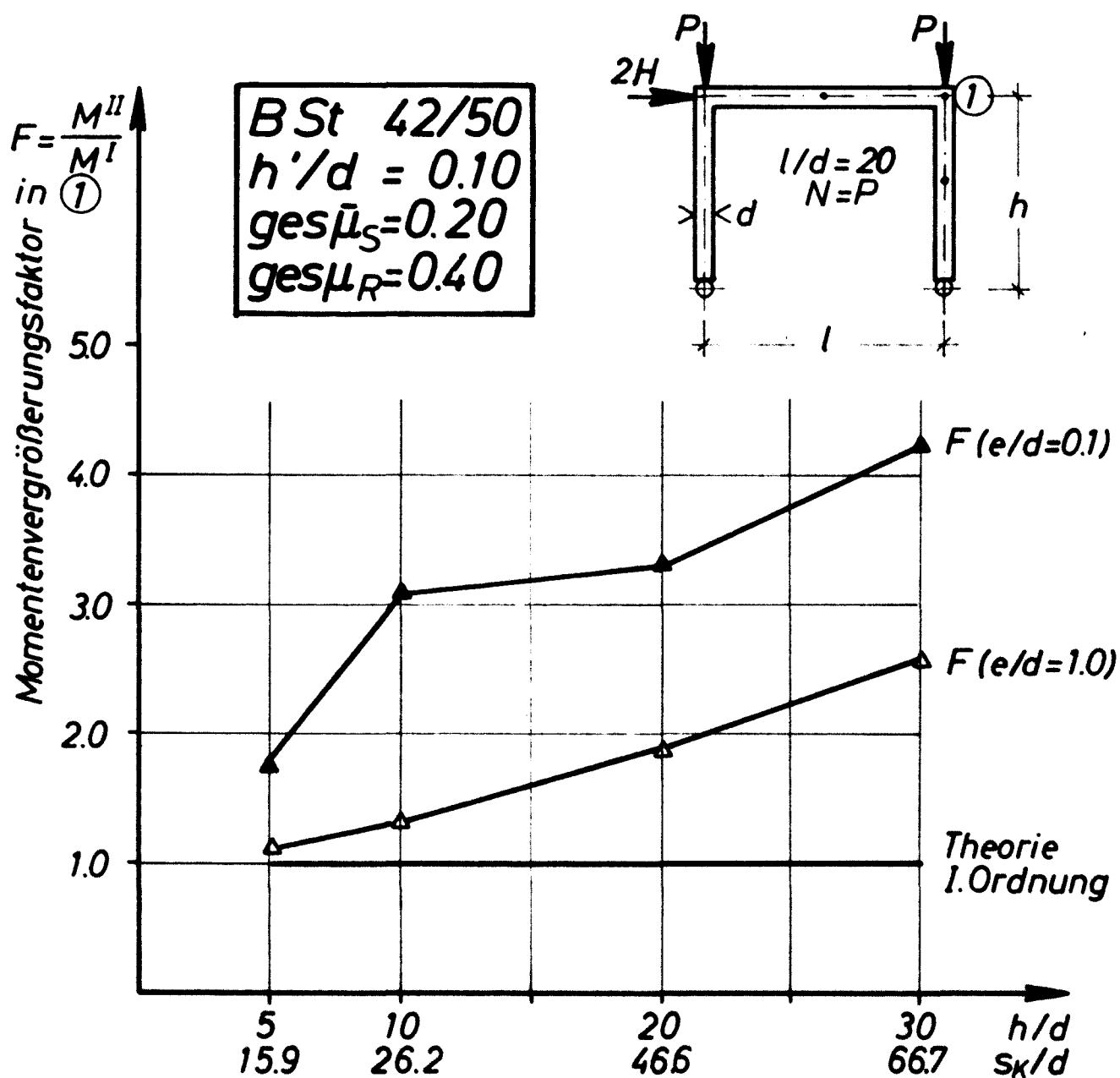
Die Stielausbiegungen werden erst von einem bestimmten Schlankheitsgrad  $h/d$  ab so groß, daß die Momente im Bereich der Stielmitte die der Stielenden überschreiten. Unterhalb dieser "Grenzschlankheit" übt die Momentenvergrößerung keinen traglastmindernden Einfluß aus, da der Versagensquerschnitt am Stielende liegt. Die Problematik der Grenzschlankheit wird im 3. Teil dieses Berichtes erneut aufgegriffen und ausführlicher behandelt.



**Bild 8** Tragverhalten verschieblicher Zweigelenrahmen. Kleine Ausmitte :  $e/d = 0.10$



**Bild 9** Tragverhalten verschieblicher Zweigelenkrahmen. Große Ausmitte :  $e/d = 1.00$



**Bild 10** Momentenvergrößerungsfaktoren verschieblicher Zweigelenrahmen

### 1.1.2 Verschiebbliche Systeme

In den Bildern 8 - 9 ist das charakteristische Tragverhalten verschieblicher Zweigelenkrahmen dargestellt.

Analog zum Abschnitt 1.1.1 wurden die Biegemomente an den Knoten bzw. Stabanschnitten in Abhängigkeit der Lasthöhe aufgetragen.

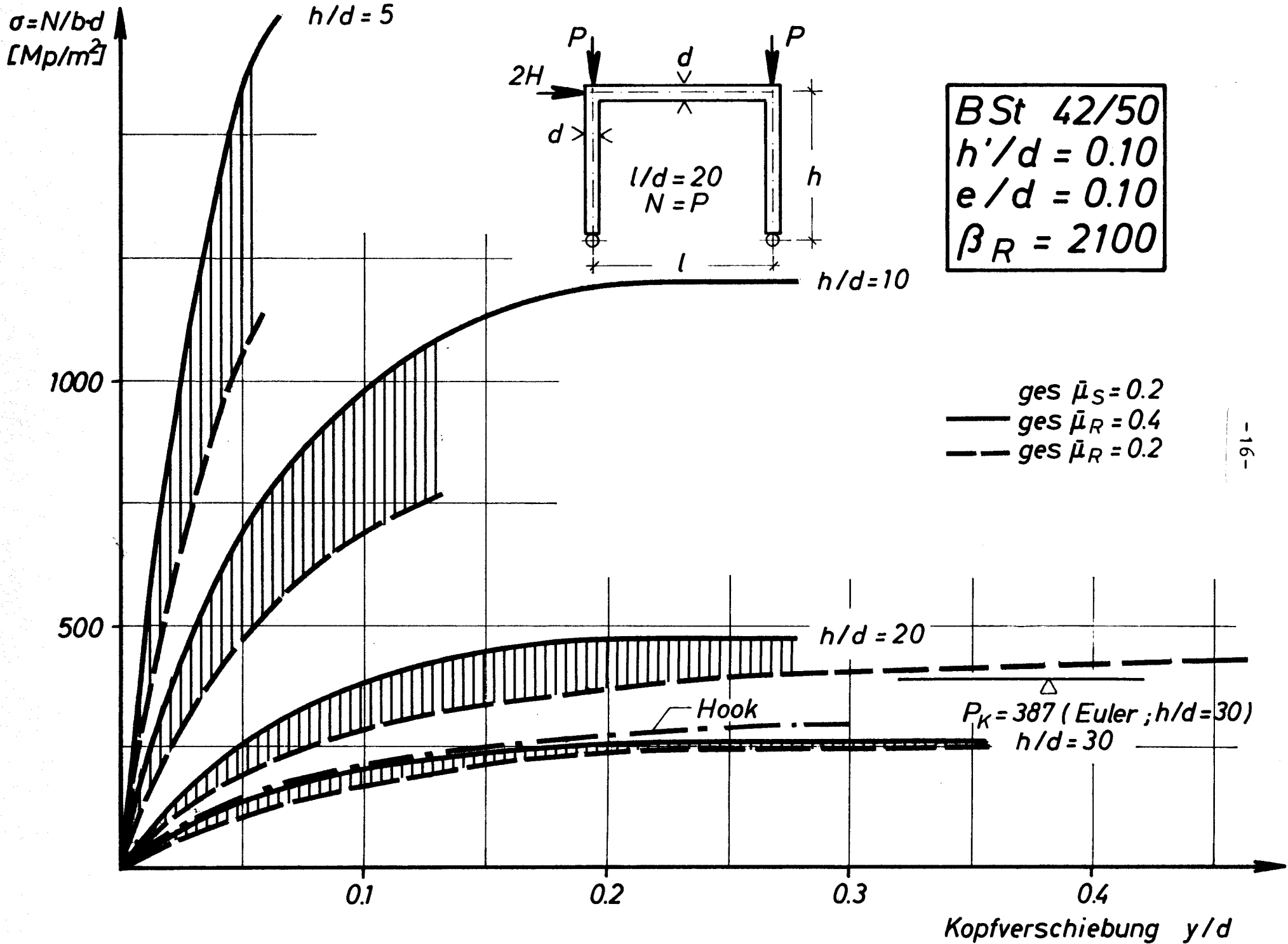
Eine wesentliche, charakteristische Eigenschaft aller in den Bildern 8 - 9 dargestellten Systeme und Lastanordnungen ist, daß infolge seitlicher Auslenkung die maximale Biegebeanspruchung immer an den Knoten auftritt. Diese Feststellung läßt sich mechanisch analog zum Abschn. 1.1.1 (vgl. Bild 6 und Gleichungen (1) bzw. (2)) erklären und für verschiebbliche Systeme verallgemeinern.

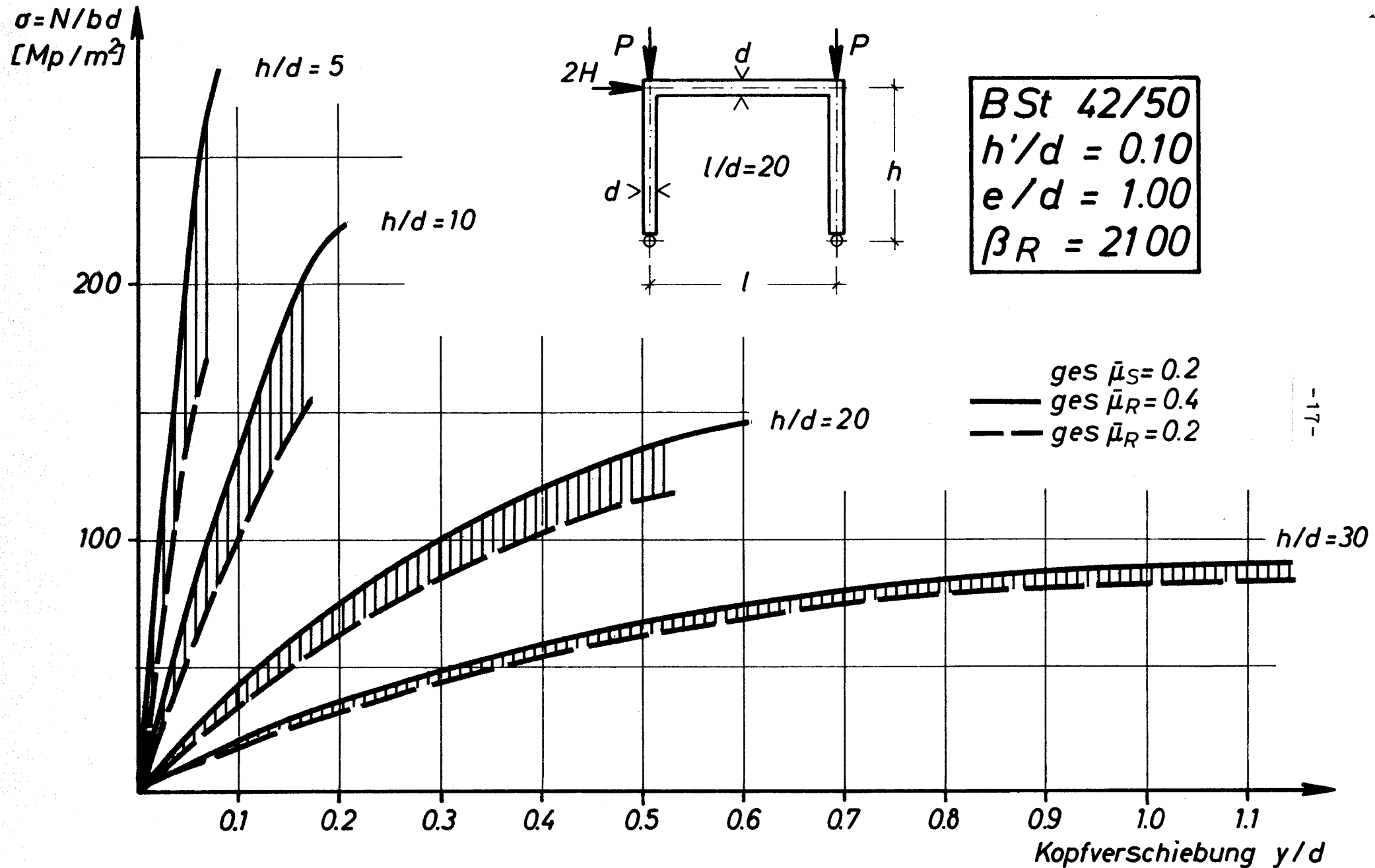
Das Maß der nichtlinearen Momentenvergrößerung in den Stielen wird im Bild 10 analog zum Bild 7 dargestellt. Die Tendenz im Hinblick auf die Größe des Faktors  $F$  ist in beiden Fällen ähnlich. Die absolute Größe von  $F$  ist bei Verschieblichkeit auch bei großer Lastausmitte  $e/d = 1,0$  erheblich; dies kann als Einfluß der  $H$  - Horizontal-Lastkomponente gedeutet werden.

In den Bildern 8, 9 und 13 werden auch die verschiedenen möglichen Versagensursachen bei variierten Systemparametern, insbesondere auch der Riegelbewehrung, gezeigt. Es läßt sich erkennen, daß der Riegelbewehrung hinsichtlich des Trag- und Stabilitätsverhaltens eine bedeutende Rolle zukommt. Die Erschöpfung der Biegetragfähigkeit der Riegel bedeutet nämlich, daß auch deren aussteifende Wirkung verloren geht. Die Ausnutzbarkeit der Tragfähigkeit der Druckglieder ist also in starkem Maße von der Tragfähigkeit der aussteifenden Biegeglieder abhängig, - anders ausgedrückt: Eine Bemessung der Rahmenstiele ohne gleichzeitige Wahrung ausreichender Tragfähigkeit bei den Riegeln ist sinnlos.

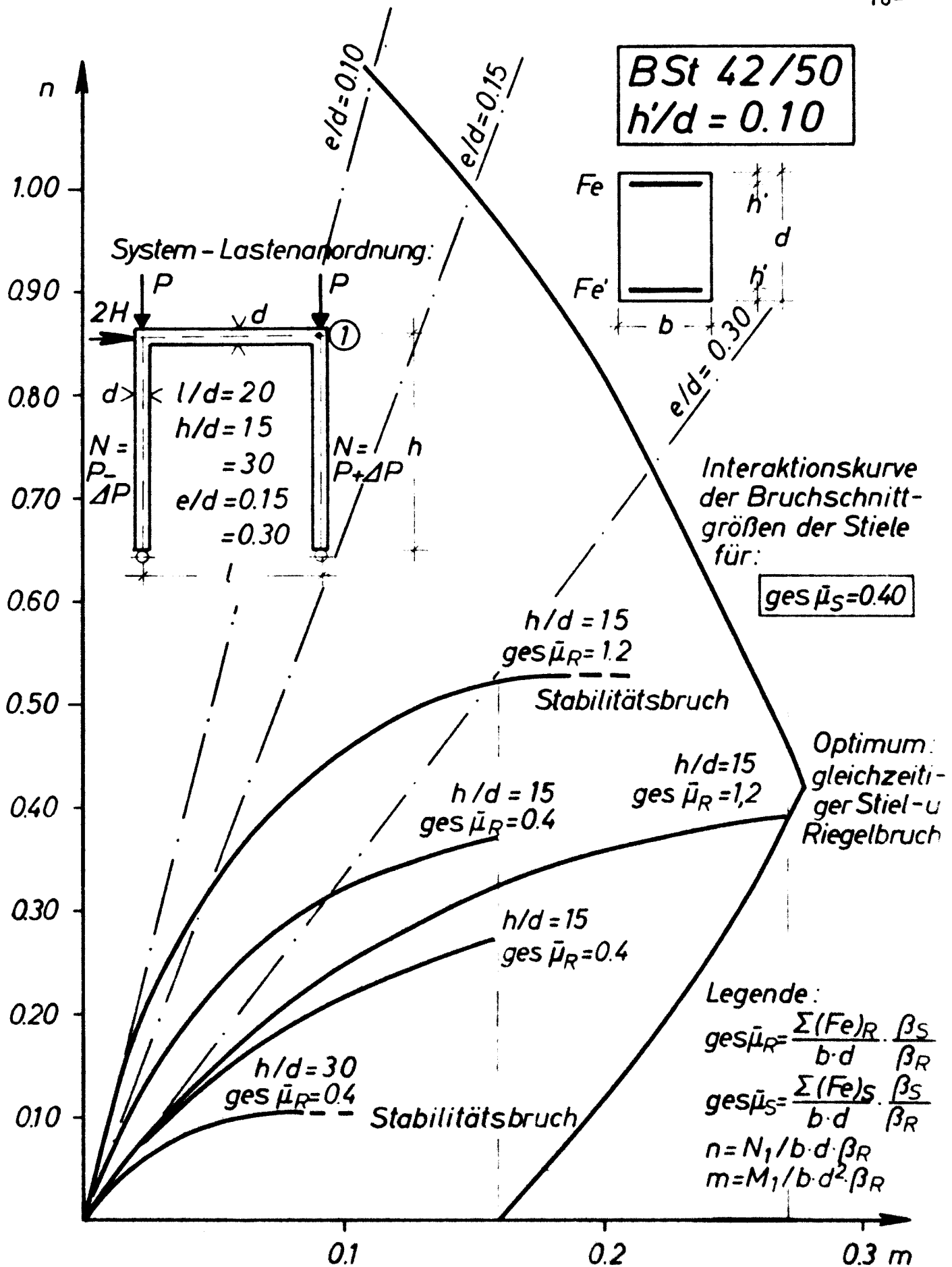


Bild 11 Verformungsverhalten verschiedener Zweigelenrahmen. Kleine Ausmitte:  $e/d = 0.1$





**Bild 12** Verformungsverhalten verschieblicher Zweigelenkrahmen.  
 Große Ausmitte :  $e/d = 1.0$



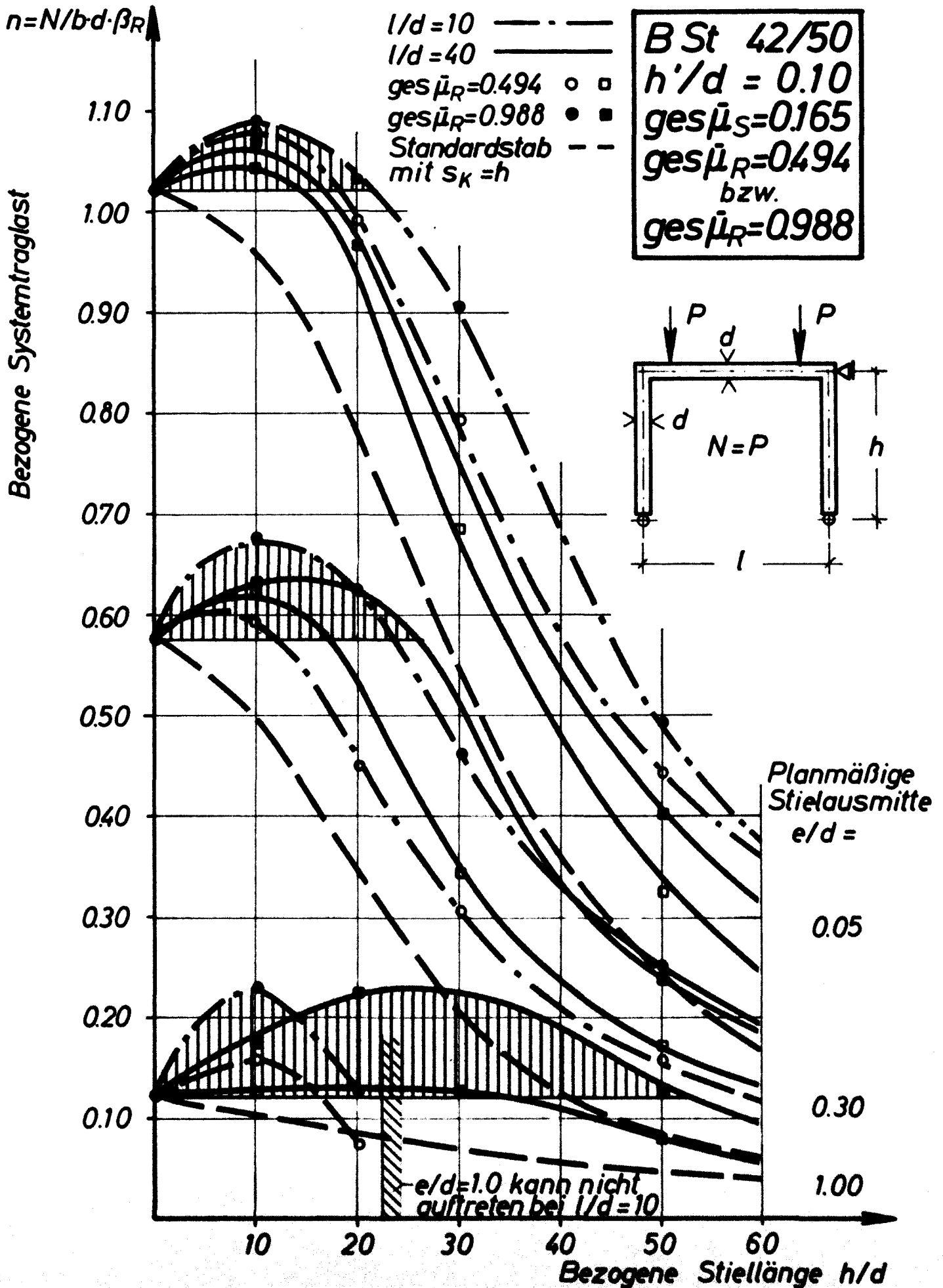
**Bild 13 Tragverhalten verschieblicher Zweigelenrahmen**

Die Bilder 11 - 12 stellen charakteristische Last-Verschiebungsdiagramme dar. Diese Diagramme zeigen, ob ein System in Verbindung mit einer bestimmten Lastanordnung Materialbruch oder Stabilitätsversagen im Traglastzustand erleidet. (s. Traglastdefinition im 1. Teil des Berichtes). Bemerkenswert ist, daß Rahmen mit relativ gedrunghenen Stielen ( $h/d = 10 \rightarrow s_K/d = 26,2$  in Bild 11) ein deutlich ausgeprägtes Stabilitätsversagen zeigen können im Falle kleiner Lastausmitte in den Stielen. ( $e/d = 0,10$  in Bild 11) Die Erklärung hierfür ist die ungünstige Überlagerung mehrerer geometrisch und physikalisch nichtlinearer Effekte in diesem Falle, nämlich der Effekt des Zusatzmomentes  $N \cdot y$ , das Absinken des Tangentenmoduls  $T \ll E_p$  infolge hoher axialer Beanspruchung, die Wirkung der horizontalen Last  $H$  und das allmähliche Fließen der Riegelbewehrung und damit Absinken der aussteifenden Wirkung. Dieses Beispiel zeigt, daß eine zutreffende Beurteilung des Tragverhaltens nur unter Berücksichtigung aller maßgebenden, meist nichtlinearen Einflüsse möglich ist.

## 2. Traglastberechnungen für unverschiebliche Zweigelenkrahmen

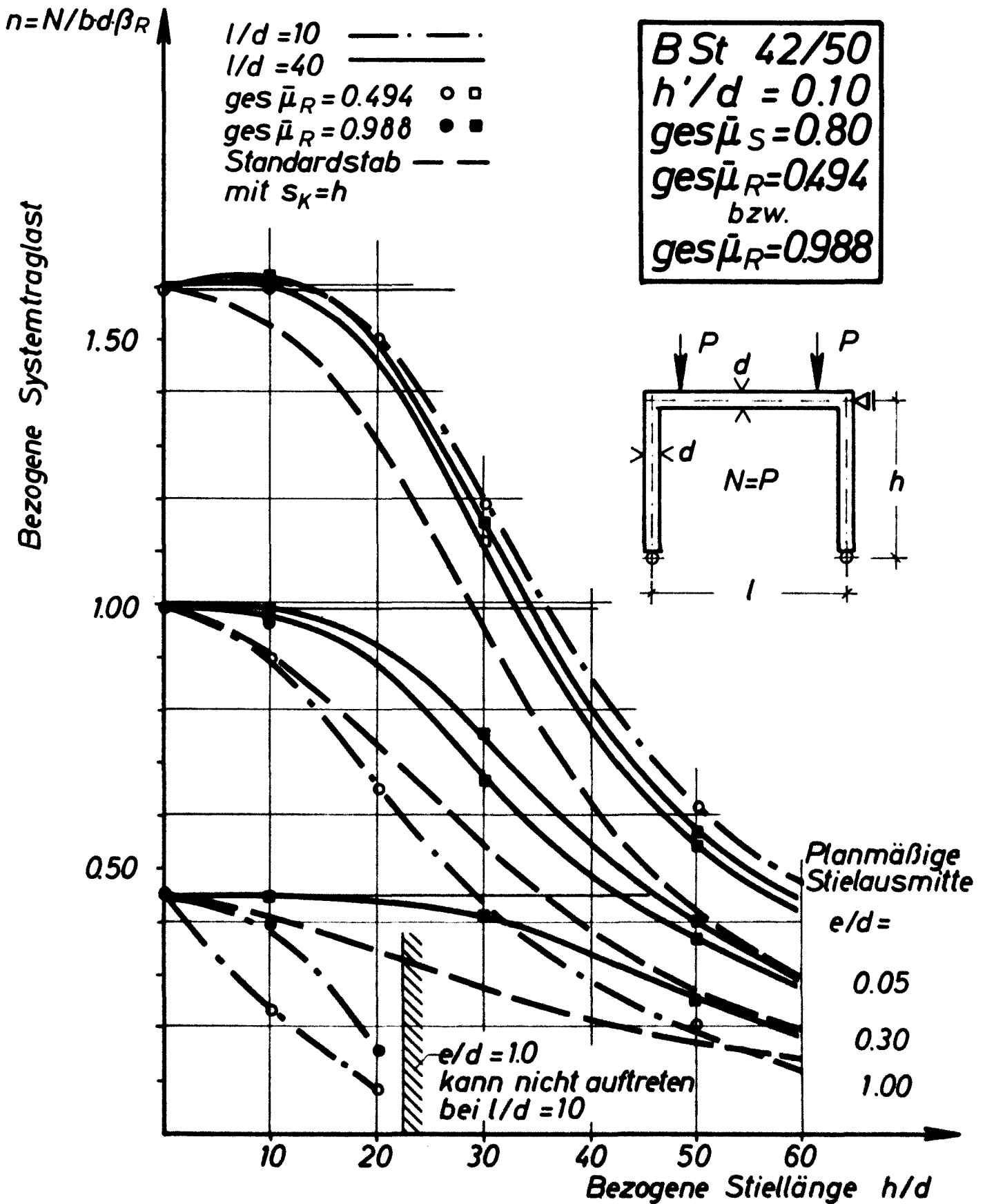
Zur Klärung des Verhaltens des unverschieblichen Einfeldsystems wurden die auf den Bildern 14 - 16 dargestellten Traglastdiagramme, die sich auf einen praxisnahen Anwendungsbereich der variablen Einflußgrößen erstrecken, errechnet.

Vor Erläuterung der Rechenergebnisse werden noch einige Bemerkungen zur Auswahl und Bedeutung der einzelnen Hauptparameter gemacht:



**Bild 14 Traglastdiagramm unverschieblicher Zweigelenrahmen**





**Bild 16 Traglastdiagramm unverschieblicher Zweigelenkrahmen**

Die durch lotrechte Riegelbelastung hervorgerufene planmäßige bezogene Lastausmitte der Rahmenstiele ist lastunabhängig und allein durch Systemgeometrie und Steifigkeitsverteilung der Stäbe bestimmt. Dies bedeutet zugleich, daß diese Einflußgröße (in den Bildern:  $e/d$  bezeichnet) nicht immer frei angenommen werden kann. Um diese Aussage zu verdeutlichen, sei die ungünstigste Lastanordnung für Rahmen, bei welcher die gesamte lotrechte Last in Riegelmitte als Einzellast angreift, betrachtet:

Aus den elementaren Formeln der Stabstatik läßt sich für in der Riegelmitte durch Einzellast belastete symmetrische Rahmen mit stabweise konstantem Querschnitt die bezogene Stielausmitte wie folgt angeben:

$$e/d = \frac{3}{4} \frac{l/d}{\frac{J_R/l}{(2\frac{J_S}{h} + 3)}} \quad \begin{array}{l} \text{(gelenkige Lagerung} \\ \text{der Stielfüße)} \end{array} \quad (4)$$

(Bezeichnungen s.S.11)

$$e/d = \frac{1}{2} \frac{l/d}{\frac{J_R/l}{(\frac{J_S}{h} + 2)}} \quad \begin{array}{l} \text{(eingespannte} \\ \text{Stielfüße)} \end{array} \quad (5)$$

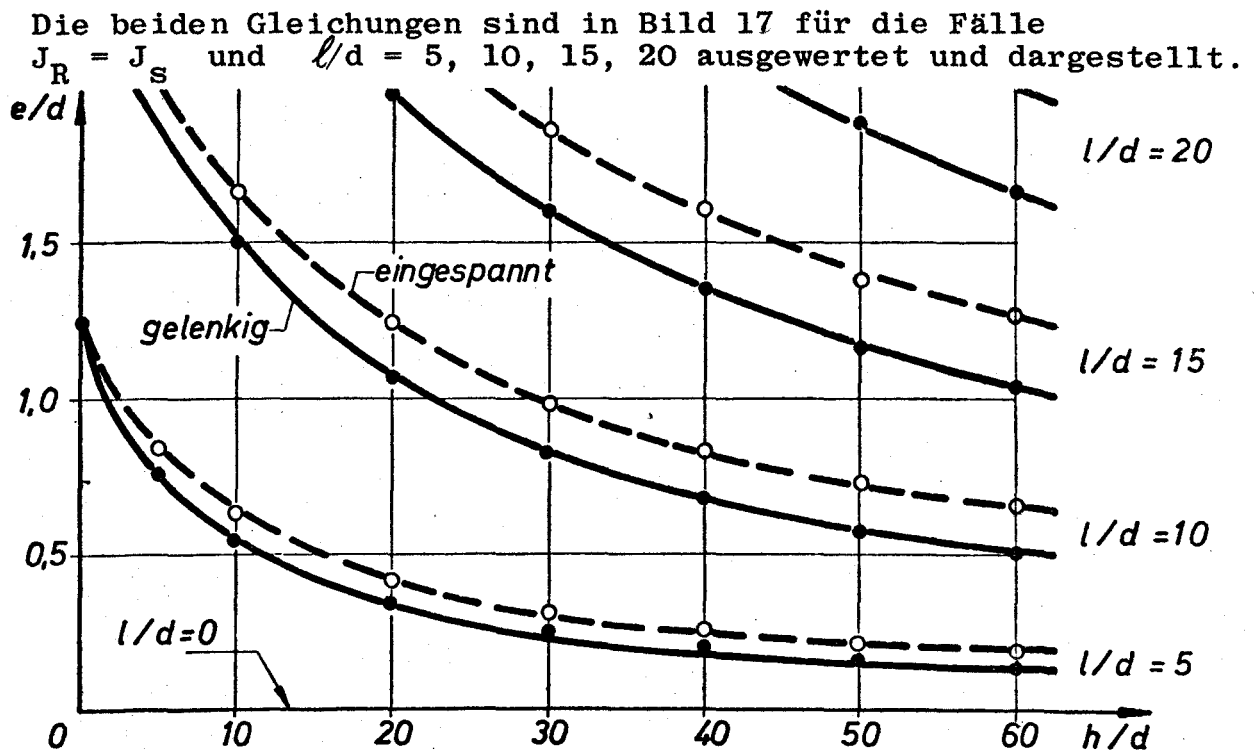


Bild 17: Maximal erzeugbare Stielausmitte in unverschieblichen Systemen.



Dem Bild 17 kann das Maß der "Zentrierung" der Stielnormalkräfte infolge Aussteifung der Riegel entnommen werden. Die weiteren Untersuchungen wurden auf die planmäßigen Ausmitten  $e/d \leq 1,00$  ( $e/d = 0,05; 0,30; 1,00$ ) beschränkt.

Zur Erfassung der Stielschlankheit und der Biegesteifigkeit der Riegel werden deren auf die Querschnittsdicke bezogene Längen als Parameter eingeführt. ( $\ell/d$  bzw.  $h/d$ ) Da in Stabilitätsbetrachtungen die Knicklängen nach der Elastizitätstheorie eine wesentliche Hilfsgröße darstellen, wurden die zugeordneten Knicklängenbeiwerte  $\beta$  nach den folgenden Knickbedingungen errechnet:

Für unverschiebliche Systeme s. Tafel 1:

$$\frac{\varepsilon \cdot \tan \varepsilon}{\varepsilon - \tan \varepsilon} - 2 \frac{J_R \cdot h}{J_S \cdot \ell} = 0 \quad (6)$$

und für verschiebliche Systeme s. Tafel 2:

$$\varepsilon \cdot \tan \varepsilon - 6 \frac{J_R \cdot h}{J_S \cdot \ell} = 0 \quad (7)$$

wobei

$J_R$  = Trägheitsmoment des Riegels

$J_S$  = Trägheitsmoment der Stiele

$h$  = Höhe der Stiele

$\ell$  = Länge des Riegels

$\varepsilon = h \sqrt{P/EJ_S}$  Stabkennzahl

bedeuten.

BETA-WERTE NACH DER ELASTIZITAETSTHEORIE FUER SYMMETRISCHE  
 VERTIKAL MITTIG BELASTETE ZWEIFELNKRAHMENSTUETZEN  
 STEIFIGKEITSVAERHAELTNIS I-RIEGEL/I-STUETZE = 1.0  
 STUETZENLAENGE L/D= 5,10,...50 (DL1/D=5.0)  
 RIEGELLAENGE L/D= 5,10,...50 (DL2/D=5.0)

1	0.874	0.921	0.943	0.955	0.963	0.969	0.973	0.976	0.978	0.980
2	0.819	0.874	0.903	0.921	0.934	0.943	0.950	0.955	0.959	0.963
3	0.790	0.842	0.874	0.895	0.910	0.921	0.930	0.937	0.943	0.948
4	0.771	0.819	0.851	0.873	0.890	0.903	0.913	0.921	0.928	0.934
5	0.759	0.802	0.833	0.856	0.873	0.887	0.898	0.907	0.915	0.921
6	0.750	0.789	0.819	0.841	0.859	0.873	0.885	0.895	0.903	0.910
7	0.744	0.779	0.807	0.829	0.847	0.861	0.873	0.884	0.892	0.899
8	0.739	0.771	0.798	0.819	0.836	0.851	0.863	0.873	0.882	0.890
9	0.734	0.765	0.790	0.810	0.827	0.842	0.854	0.864	0.873	0.881
10	0.731	0.759	0.782	0.802	0.819	0.833	0.845	0.856	0.865	0.873
RIEGELLAENGE L/D= 5-50										

STUETZENLAENGE L/D= 5-50

Knicklängen verschieblicher Zweigelenkrahmen

$$\xi \cdot \tan \xi - 6 \frac{E \cdot J_R}{E \cdot J_S} \cdot \frac{h}{\ell} = 0$$

$h/d$	$h/\ell$	$6 \frac{E \cdot J_R}{E \cdot J_S} \cdot \frac{h}{\ell}$	$\beta$	$s_K/d$	$\beta_{RED}$	$(s_K/d)_{RED}$	
5	0,25	1,5	0,988	3,180	15,90	4,283	21,41
10	0,50	3,0	1,197	2,624	26,24	3,180	31,80
20	1,00	6,0	1,349	2,329	46,58	2,624	52,48
30	1,50	9,0	1,412	2,225	66,75	2,433	72,99

Bezeichnungen wie auf Seite 11 und:

- $d$  = Querschnittsdicke der Stiele
- $E$  = Ursprungsmodul des Betons
- $\beta$  =  $\pi/\xi$  Knicklängenbeiwert
- $s_K/d$  = bezogene Knicklänge
- $\beta_{RED}$  = Knicklängenbeiwert; errechnet unter Annahme einer Reduktion der Riegelsteifigkeit auf  $0,5 \cdot EJ_R$
- $(s_K/d)_{RED} = \beta_{RED} \cdot h/d$

## 2.1 Einfluß der Hauptparameter auf die Systemtraglast

Der Charakter der Traglastdiagramme für Zweigelenkrahmen ist im weiten Bereich der variierten Einflußgrößen ähnlich dem eines frei drehbar gelagerten Stabes gleicher bezogener Stiellänge, (s. Bild 14 - 16) also vom Schlankheits- einfluß geprägt. Eine wesentliche Abweichung zwischen vergleichbaren Diagrammen tritt jedoch im Bereich kleiner bezogener Stiellängen ( $h/d < 15$ ) und großer bezogener Lastausmitten ( $e/d > 0,3$ ) auf. In diesen Bereichen treten nämlich bei Rahmenstielen merkbare Traglaststeigerungen bei zunehmenden Stielschlankheiten auf. Diese Erscheinung ist umso markanter, je größer die geometrisch bedingte ( $\ell/d$ ) und die bewehrungsmäßige ( $\text{ges } \bar{u}_R$ ) Aussteifung des Systems ist. Ursache der Traglaststeigerung ist die schlankheits- und ausmittenbedingte Abnahme der wirksamen Ausmitte am verformten System, wie es in den Bildern 2 - 5 erkennbar ist; durch die zunehmende Verformbarkeit der Stiele wird die dem unverformten Zustand zugeordnete planmäßige Ausmitte abgemindert.

Eine weitere wesentliche Eigenschaft der in den Bildern 14 - 16 dargestellten Systemtraglasten ist, daß sie oft nicht durch die Tragfähigkeit der Druckglieder sondern durch die der Biegeglieder erreicht worden sind. In Bild 15 - das mittleren Bewehrungsverhältnissen entspricht - ist zu sehen, daß z.B. bei der Parameterkombination  $e/d = 1,0$ ;  $h/d = 20$ ;  $\ell/d = 10$  die Systemtraglast auch bei hoher Riegelbewehrung ( $\text{ges } \bar{u}_R = 0,988$ ) stark beschränkt wird. Ursache dieses Verhaltens ist die starke Umlagerung der Biegemomente infolge der geometrischen und bewehrungsmäßigen Aussteifung des Riegels. Die Rieglmomente am Knoten nehmen nämlich - wie schon in den Bildern 2 - 5 gezeigt wurde, mit zunehmender axialer Beanspruchung der

Stiele ab, während die Feldmomente entsprechend zunehmen. (Verlauf der charakteristischen Momente s. Bild 2 - 5) Folge der Momentenumlagerung ist Materialbruch im Feldbereich des Riegels. Der Riegelbruch bedeutet gleichwohl das Erreichen der Systemtraglast, da entsprechend der annähernd konstanten Momentenfläche zwischen den Einzellasten  $P$  ein längerer Bereich des Riegels im wesentlichen auch seine Biegesteifigkeit verliert. Folglich geht die Einspannung der Stiele und damit die Systemstabilität verloren.

Bemerkenswert ist weiterhin, wie die geometrische Aussteifung des Systems (charakterisiert durch den Parameter  $\ell/d$ ) die Höhe der Systemtraglast beeinflusst. Im Falle kleiner planmäßiger Ausmitten ( $e/d = 0,05$ ) erhöht sich erwartungsgemäß die Systemtraglast im gesamten praktischen Schlankheitsbereich der Stiele infolge Versteifung der Riegel.  $P_K(\ell/d = 10) > P_K(\ell/d = 40)$ . Hingegen liefern oft bei mittleren bis großen planmäßigen Stielausmitten ( $e/d = 0,30 - 1,00$ ) die weniger ausgesteiften Systeme höhere Traglasten. ( $P_K(\ell/d = 40) > P_K(\ell/d = 10)$ ). Dieses etwas überraschende Verhalten läßt sich dadurch erklären, daß schlankere, weichere Riegel größere Systemverformungen und damit stärkere - traglaststeigernde - Schnittkraftumlagerungen erleiden können, ohne die Biegebruchschnittgrößen zu überschreiten, wohingegen steifere Riegel schon früher auf Biegebruch versagen.

Der Einfluß der durch die Riegelbewehrung bedingten Aussteifung des Systems auf die Systemtraglast ist unterschiedlich. Bei kleinen Ausmitten ( $e/d \leq 0,05$ ) bewirkt eine Erhöhung der Riegelbewehrung um 100 % lediglich

nur eine bis zu etwa 15%-ige Traglaststeigerung, die im wesentlichen der durch die Bewehrung erhöhten effektiven Biegesteifigkeit zuzuschreiben ist. Hingegen kann 100 % Erhöhung in der Riegelbewehrung bei planmäßigen Ausmitten von  $e/d = 0,30 - 1,00$  bis zu 100 % Traglaststeigerung verursachen. In diesen Fällen ist nämlich die Systemtraglast durch die vorhandene Riegelbewehrung begrenzt, deren Erhöhung eine erhöhte Ausschöpfung der Gesamttragfähigkeit erlaubt.

Einen Überblick über die errechneten Traglasten und die hierfür variierten Parameter gibt Tafel 3.

T A F E L 3

Überblick über die errechneten Rahmentraglasten für symmetrisch,  
lotrecht belastete Zweigelenkrahmen. (Die Tafelwerte sind auf  $b \cdot d \cdot \beta_R$   
bezogen)

BSt 42/50

$h'/d = 0,10$

ges $\bar{\mu}_R$	h/d	$\ell/d = 10$			$\ell/d = 40$		
		e/d			e/d		
		0,05	0,30	1,00	0,05	0,30	1,00
0,494	10	1,078	0,588	0,157	1,043	0,622	0,124
		1,215	0,680	0,198	1,183	0,700	0,223
		1,581	0,896	0,227	1,604	0,977	
	20	0,988	0,449	0,074	0,940	0,530	0,128
		1,132	0,526	0,086	1,060	0,674	0,225
		1,491	0,649	0,095	1,460	0,880	
	30	0,793	0,305		0,686	0,341	0,125
		0,881	0,343		0,788	0,424	0,216
		1,183	0,421		1,119	0,660	
	50	0,444	0,159		0,324	0,165	0,079
		0,474	0,172		0,393	0,220	0,125
		0,614	0,209		0,540	0,363	
0,988	10	1,085	0,674	0,229	1,069	0,627	0,173
		1,227	0,750	0,285	1,193	0,723	0,304
				0,394	1,618	0,994	0,446
	20	1,030	0,624	0,127	0,961	0,629	0,225
		1,180	0,720	0,135	1,090	0,720	0,300
				0,151	1,485	0,920	0,44
	30	0,905	0,459		0,745	0,510	0,220
		0,928	0,473		0,831	0,529	0,262
					1,150	0,765	0,413
	50	0,493	0,250		0,401	0,236	0,130
		0,565	0,265		0,446	0,358	0,140
					0,564	0,388	0,248

1. Zeile

2. Zeile

3. Zeile

ges  $\bar{\mu}_s = 0,165$

= 0,329

= 0,800

## 2.2 Stabsteifigkeiten der Druck- und Biegeglieder des unverschieblichen Systems

Die strenge rechnerische Behandlung des Traglastproblems von Stahlbetonrahmen erfordert einen unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand. Dieser resultiert nicht zuletzt daraus, daß auch bei üblichen prismatischen Stäben eine beanspruchungsabhängige Veränderlichkeit der örtlichen Biegesteifigkeiten berücksichtigt wird. Es ist jedoch denkbar, mit einem konstanten, dennoch dem jeweiligen Beanspruchungszustand angepaßten Steifigkeitswert das Wesentliche des Verformungsverhaltens von Stahlbetonstäben zu erfassen. Um diese Möglichkeit zu prüfen, wurden konstante Ersatzstabsteifigkeiten während der in Abschnitt 2.1 behandelten Traglastberechnungen ermittelt. Die Bestimmung der Ersatzstabsteifigkeit erfolgte nach folgender Gleichung:

$$(EI)_w = \int_0^{\ell} M \, dx / \int_0^{\ell} K \, dx \quad (8)$$

(Eine detaillierte Erläuterung und Herleitung der Gl. (8) ist im 3. Teil des vorliegenden Berichtes angegeben, wo ein "strenges Näherungsverfahren" mit Hilfe der "wirksamen Stabsteifigkeiten" nach Gl. (8) und die damit erzielten Ergebnisse behandelt werden).

Die Auswertung der Gl. (8) aus verschiedenen Traglastrechnungen ist in den Bildern 18 - 22 dargestellt. Die "wirksamen" Stabsteifigkeiten sind auf die Querschnittsteifigkeit  $E_b J_b$  bezogen ( $E_b$  = Ursprungsmodul der Betonarbeitslinie) und in Abhängigkeit vom axialen Belastungsgrad aufgetragen.



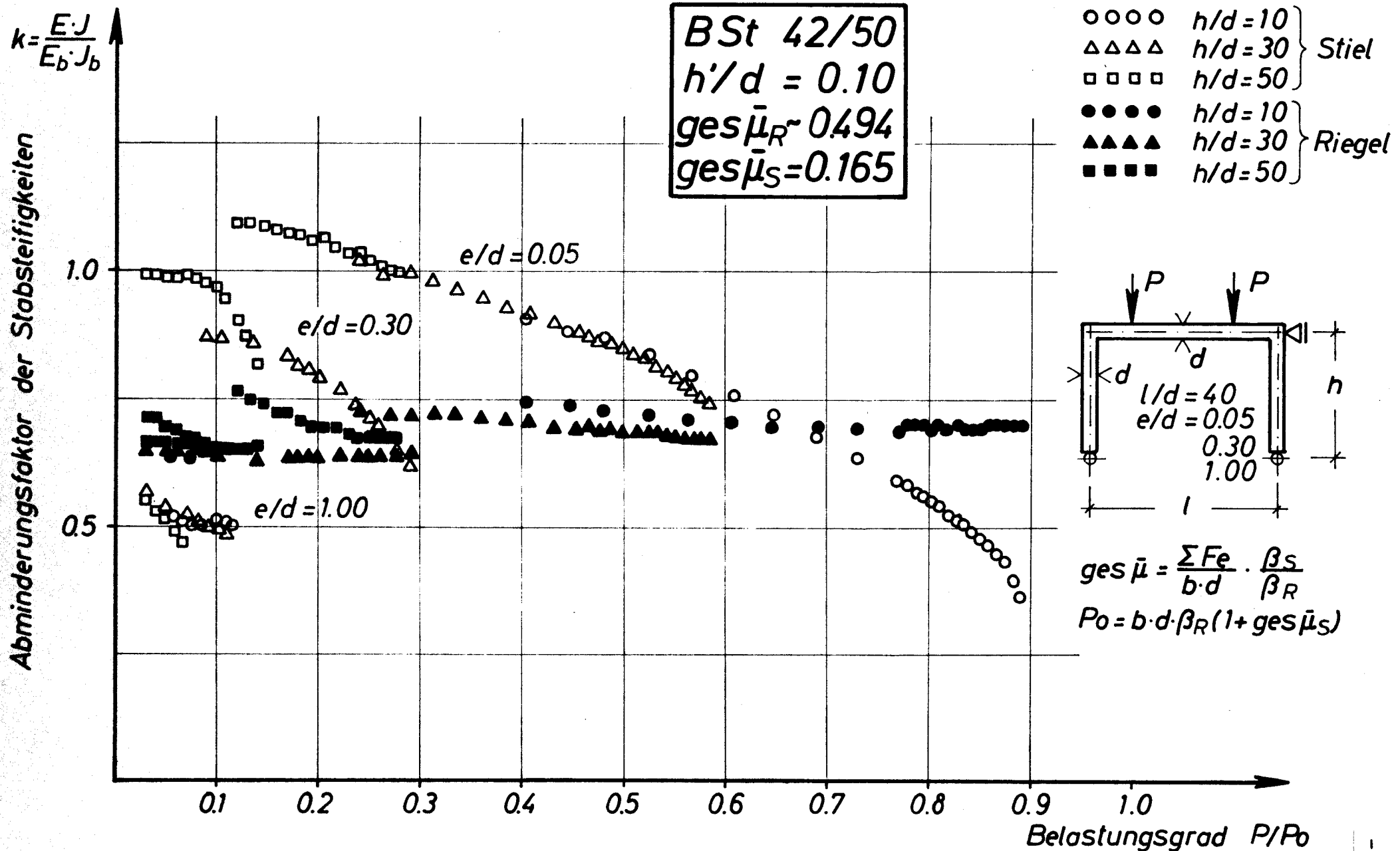
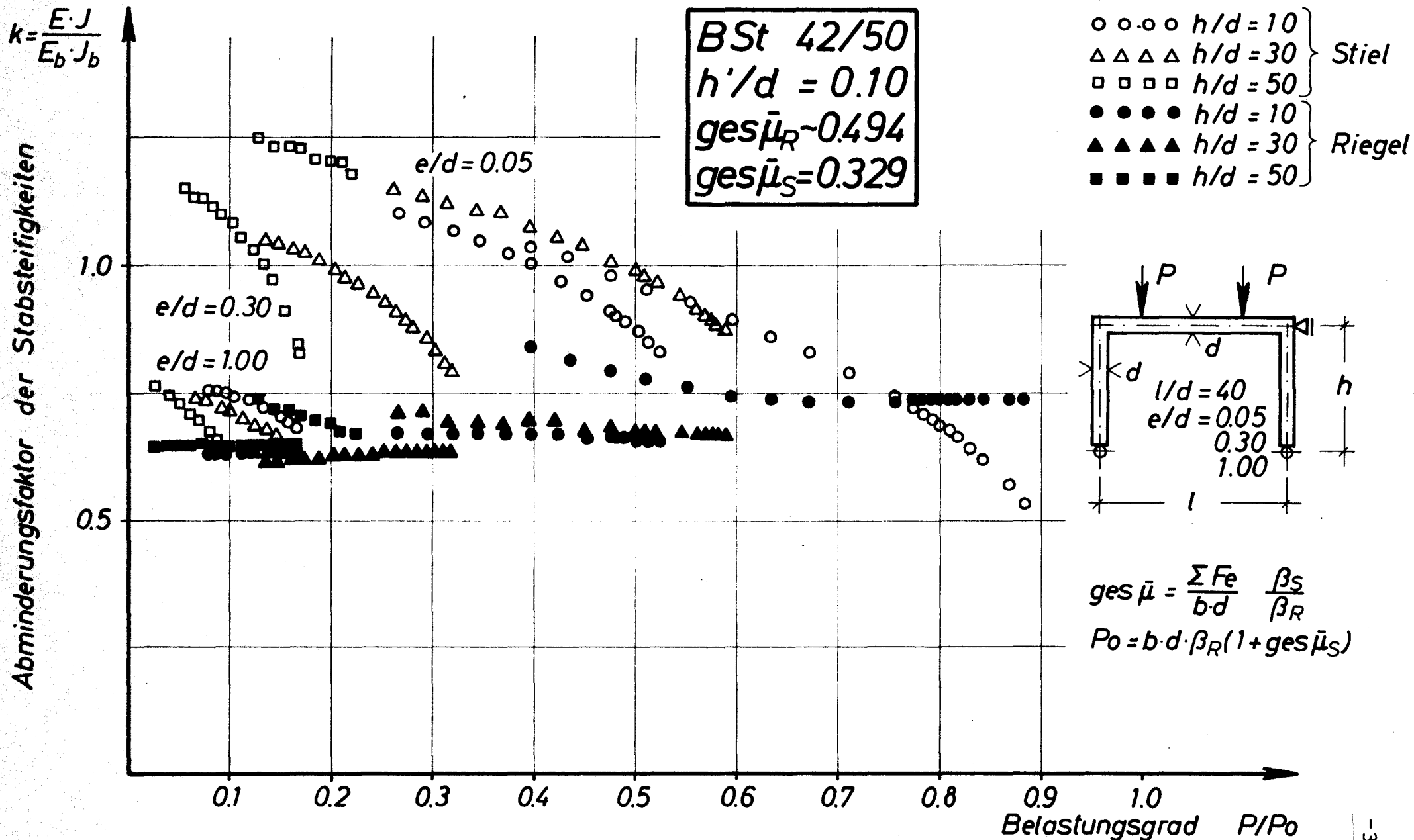
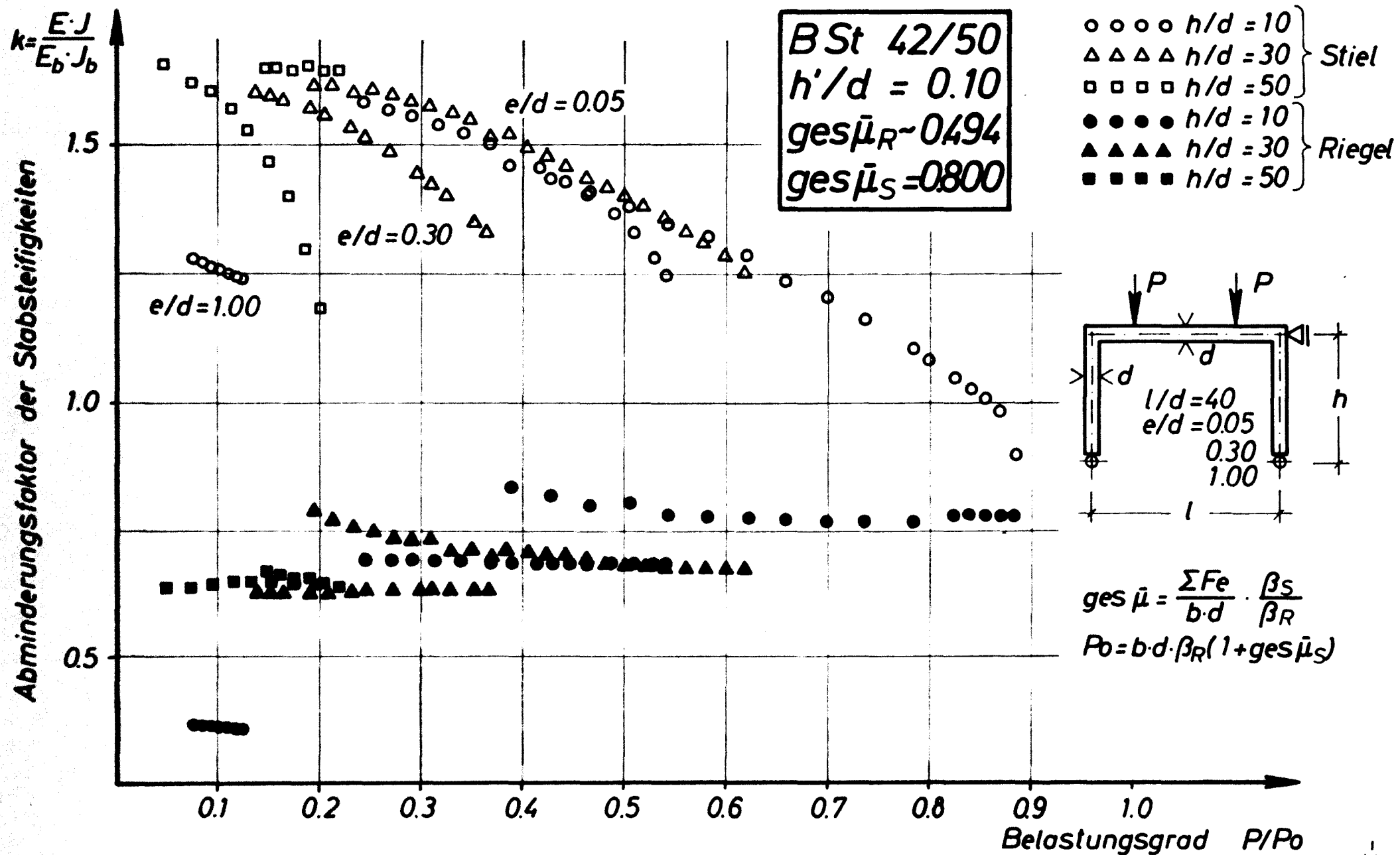


Bild 18 Ersatzstabsteifigkeiten unverschieblicher Zweigelenkrahmen



**Bild 19 Ersatzstabsteifigkeiten unverschieblicher Zweigelenkrahmen**



**Bild 20 Ersatzstabsteifigkeiten unverschieblicher Zweigelenkrahmen**

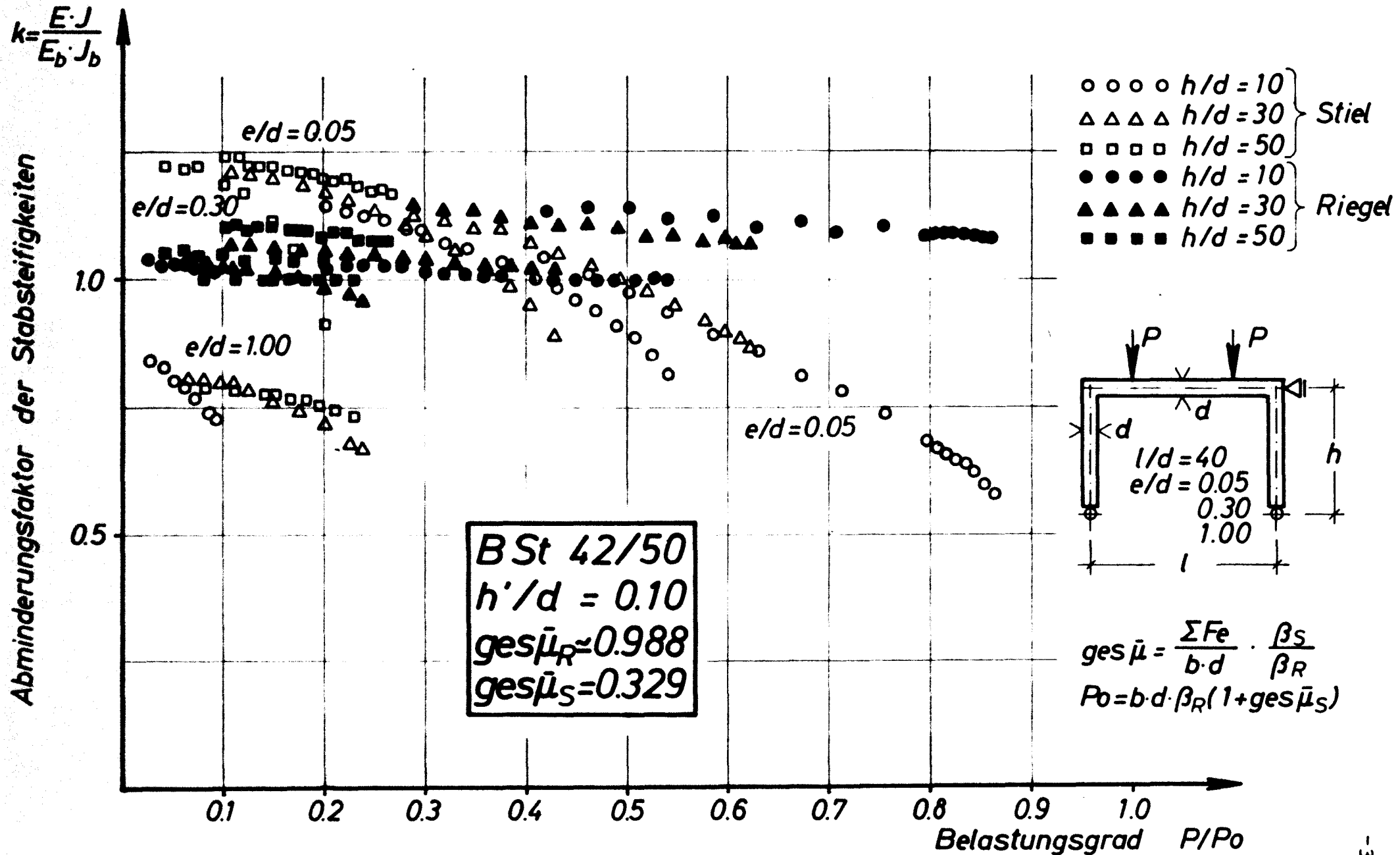
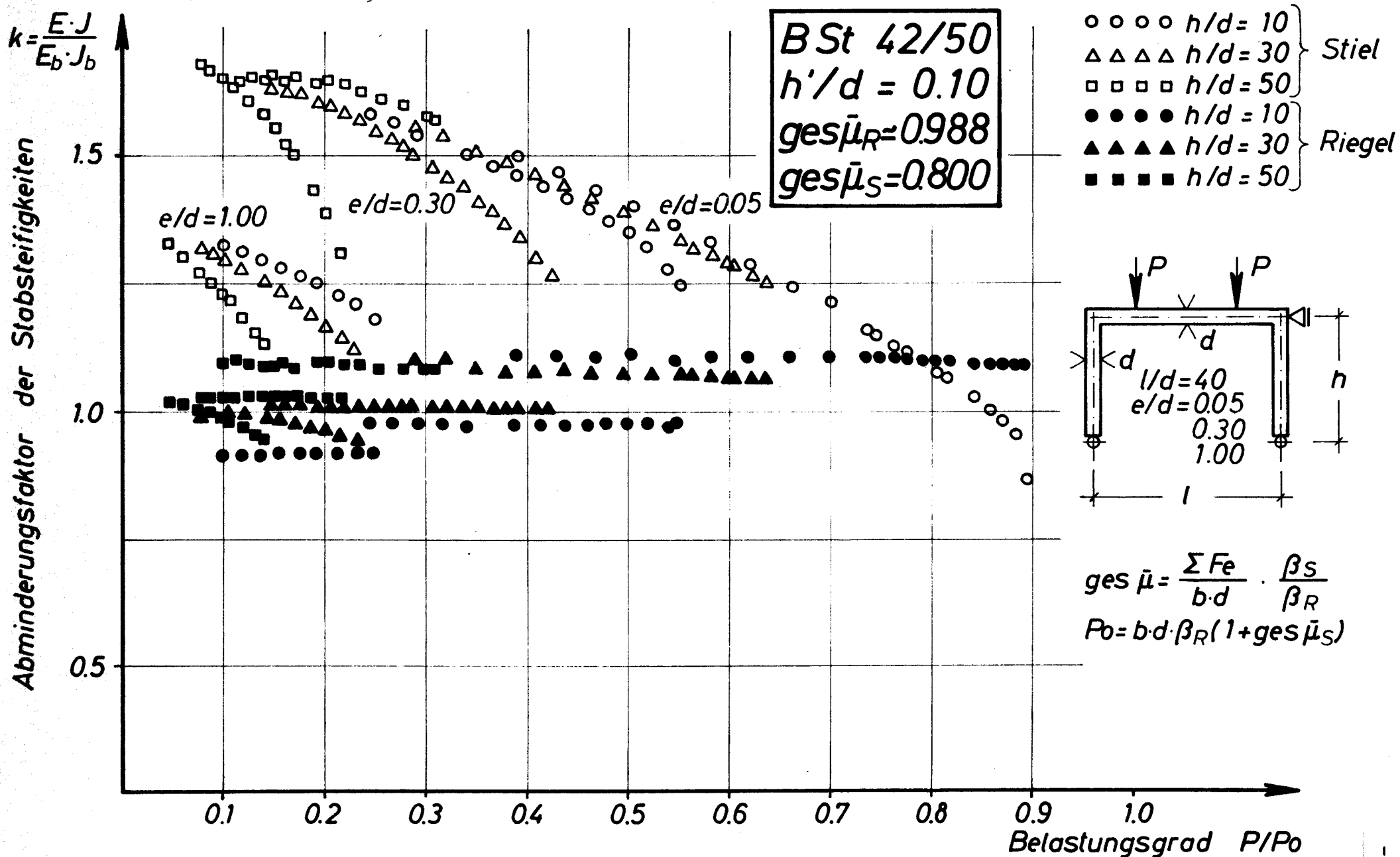


Bild 21 Ersatzstabsteifigkeiten unverschieblicher Zweigelenkrahmen



**Bild 22 Ersatzstabsteifigkeiten unverschieblicher Zweigelenkrahmen**

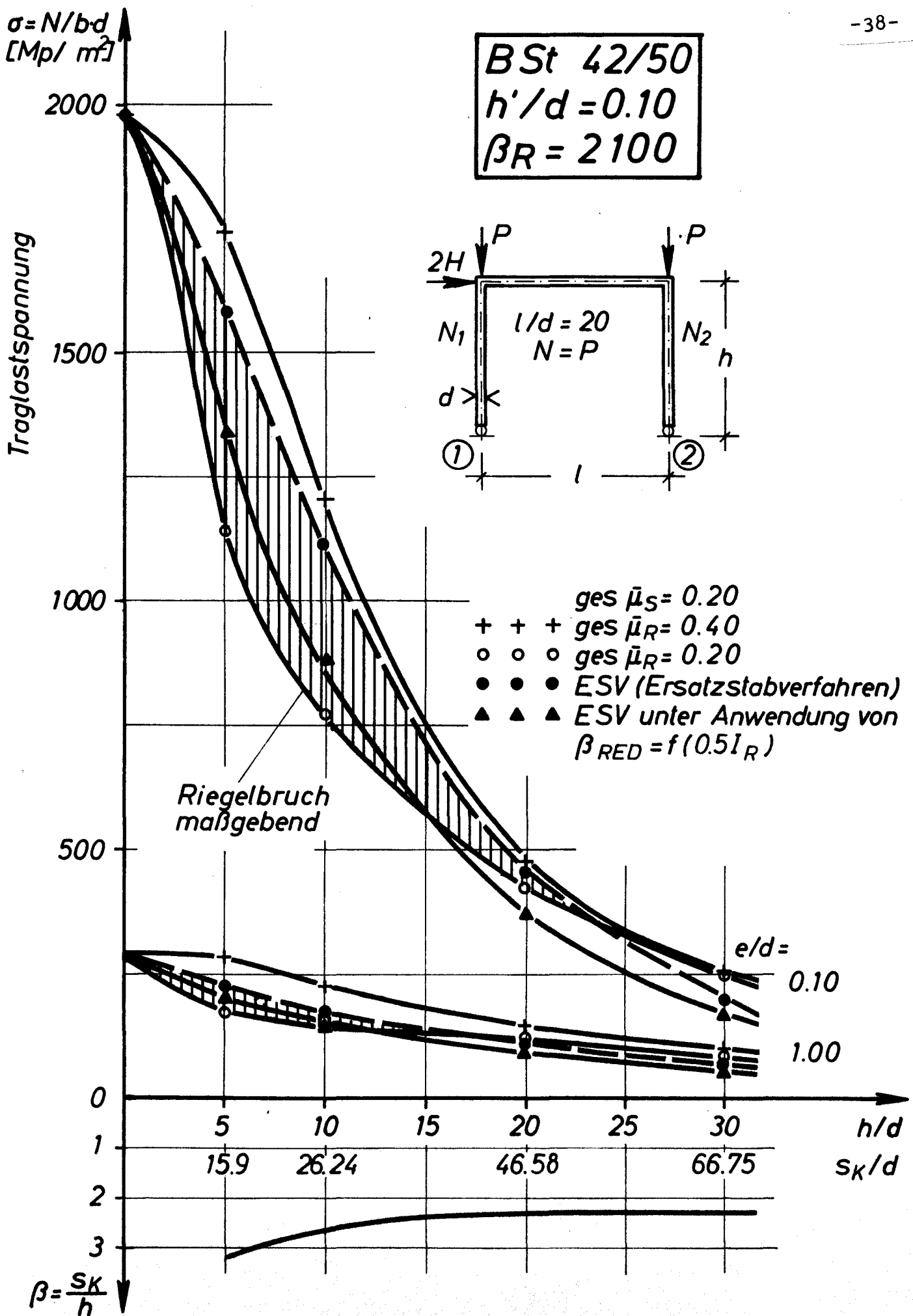
Den Bildern 18 - 22 können folgende Erkenntnisse entnommen werden: (Die Feststellungen gelten für die Stahlgüte BSt 42/50 oder für höhere Stahlgüten).

- 1.) Die "wirksamen" Stabsteifigkeiten der Biegeglieder und der Druckglieder verhalten sich verschiedenartig.
- 2.) Die "wirksamen" Stabsteifigkeiten der Biegeglieder sind vom Belastungsgrad des Systems weitgehend unabhängig, sie haben einen annähernd konstanten Wert während der Laststeigerung.
- 3.) Die "wirksamen" Stabsteifigkeiten der Druckglieder werden im wesentlichen von vier Einflußgrößen bestimmt:
  - a) Bewehrungsgehalt (ges  $\bar{\mu}_s$ )
  - b) Axialer Beanspruchungsgrad ( $P/P_0$ )
  - c) Planmäßige Lastausmitte ( $e/d$ )und
  - d) Stielschlankheit ( $h/d$ )

Die Rechenergebnisse zeigen, daß die "wirksamen" Stabsteifigkeiten mit Hilfe von verhältnismäßig wenigen Einflußgrößen angegeben werden können. Im 3. Teil dieses Berichtes wird - nach weiteren Untersuchungen der "wirksamen" Stabsteifigkeiten - zur näherungsweisen Bestimmung von deren Größe eine einfache Formel entwickelt.

## 2.3 Exemplarische Traglastuntersuchungen für verschiebbliche Zweigelenkrahmen

Zur Klärung des Tragverhaltens des verschiebblichen Einfeldsystems wurden die auf Bild 23 dargestellten Traglasten errechnet. Variiert wurden dabei die planmäßige Ausmitte



**Bild 23** Traglastdiagramm verschieblicher  
Zweigelenkrahmen

( $e/d = 0,1$  und  $1,0$ ), die Stielschlankheit ( $h/d = 5, 10, 20, 30$ ) und die Riegelbewehrung (ges  $\bar{\mu}_R = 0,20$  und  $0,40$ ). Die Riegelsteifigkeit ( $\ell/d = 20$ ) und die Stielbewehrung (ges  $\bar{\mu}_S = 0,20$ ) entsprechen typischen Systemen. (Mittlere Riegelsteifigkeit und geringe Stielbewehrung) Die Untersuchung wird zunächst in einem begrenzten Umfang geführt, da im 3. Teil dieses Berichtes an einem mehrfach zusammengesetzten Stabsystem umfangreiche, entsprechende Untersuchungen in einem großen Bereich der Einflußgrößen durchgeführt werden. (Im vorliegenden 2. Teil werden einige wesentliche Eigenschaften verschieblicher Systeme mit Hilfe des strengen Rechenverfahrens nach Teil 1 rechnerisch aufgezeigt, die im 3. Teil z.T. als Vergleichsgrößen zur Überprüfung der Genauigkeit des dort angegebenen Rechenverfahrens verwendet werden.)

Der Verlauf der Traglastdiagramme im Bild 23 ist ähnlich dem eines Standardstabes. (im Bild strichliert gezeichnet) Bemerkenswert ist, daß - anders als bei unverschieblichen Systemen - hier die zunehmende Stielschlankheit immer einen Traglastabfall bewirkt. Die Erklärung hierfür liefert das grundsätzliche Verhalten verschieblicher Systeme, bei welchen infolge einer Verschiebung die Momente vergrößert und keine wesentlichen Umlagerungen stattfinden.

Die Auswirkung einer anderen wesentlichen Einflußgröße, der Riegelbewehrung, auf die Systemtraglast besteht einerseits darin, daß eine höhere Bewehrung auch eine größere Aussteifung bedeutet, andererseits darin, daß nicht ausreichend bewehrte Riegel versagen, ehe die Stielkapazität erschöpft ist. (Versagensstelle liegt dann am Riegelanschnitt). Zwei Grenzkurven in Bild 23 zeigen den Streubereich der Systemtraglast bei Änderung der Riegelbewehrung von ges  $\bar{\mu}_R = 0,20$  auf ges  $\bar{\mu}_R = 0,40$ .



### 3. Einfluß der Belastungsgeschichte

#### 3.1 Einführung

Die bisherigen Untersuchungen wurden stets unter Zugrundelegung einer proportionalen Laststeigerung vorgenommen. Dies Vorgehen ist naheliegend und selbstverständlich, wenn es sich lediglich um einen einzigen Lastfall handelt. (z.B. in Abschn. 2: Gravitationslasten)

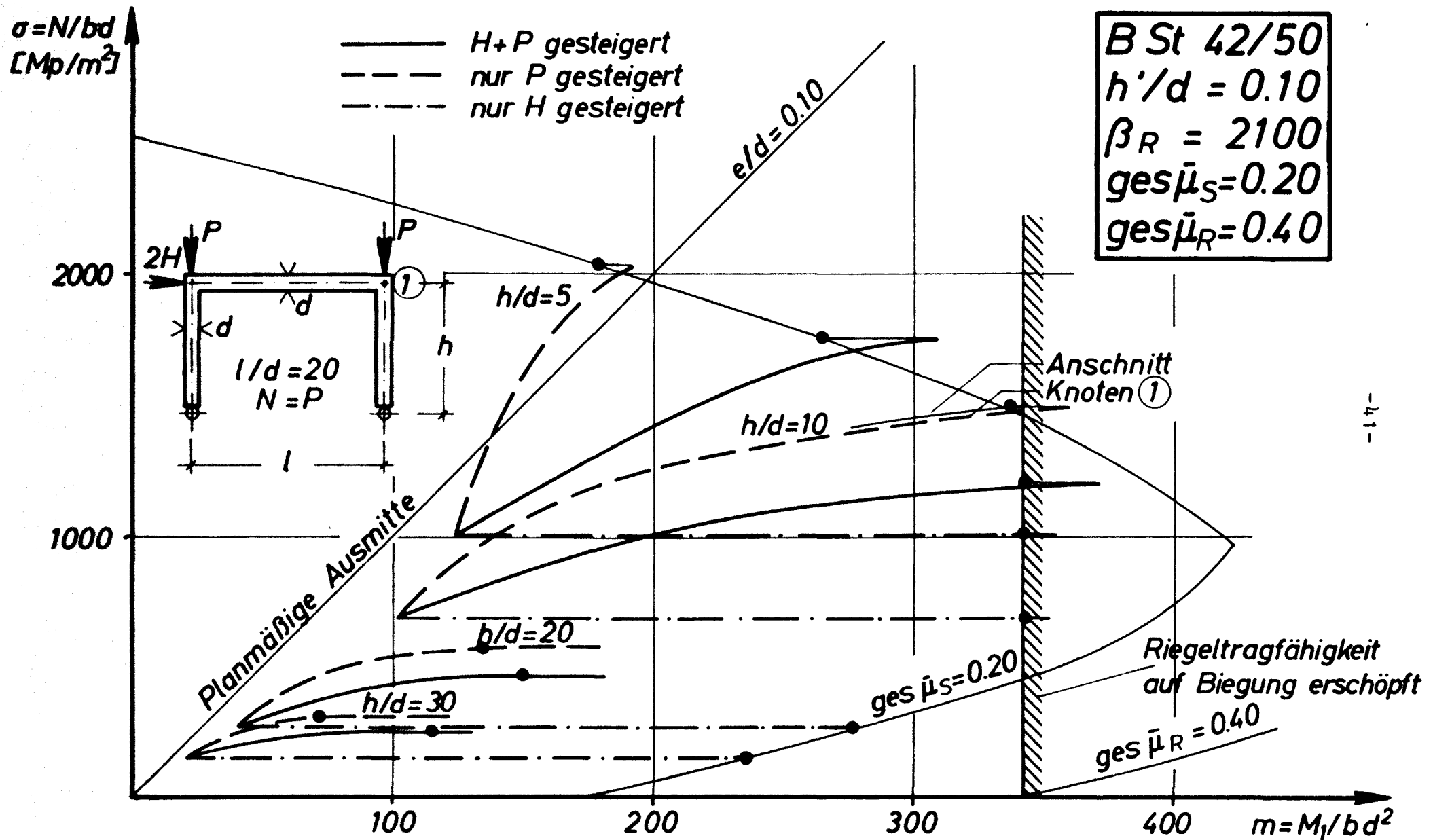
Können mehrere, voneinander unabhängige Lastfälle bzw. Lastwirkungen auftreten, so ist nicht von vornherein zu erkennen, welche Belastungsgeschichte am ungünstigsten ist, d.h. die niedrigste Traglast liefert.

Um die ungünstigste Belastungsgeschichte zu finden, werden die Traglasten einiger Systeme und Lastanordnungen für verschiedene Belastungsgeschichten errechnet. In Bild 24 sind die Rechenergebnisse für einen verschieblichen symmetrischen Zweigelenkrahmen dargestellt. Es wurden folgende 3 Arten von Laststeigerungen einander gegenübergestellt:

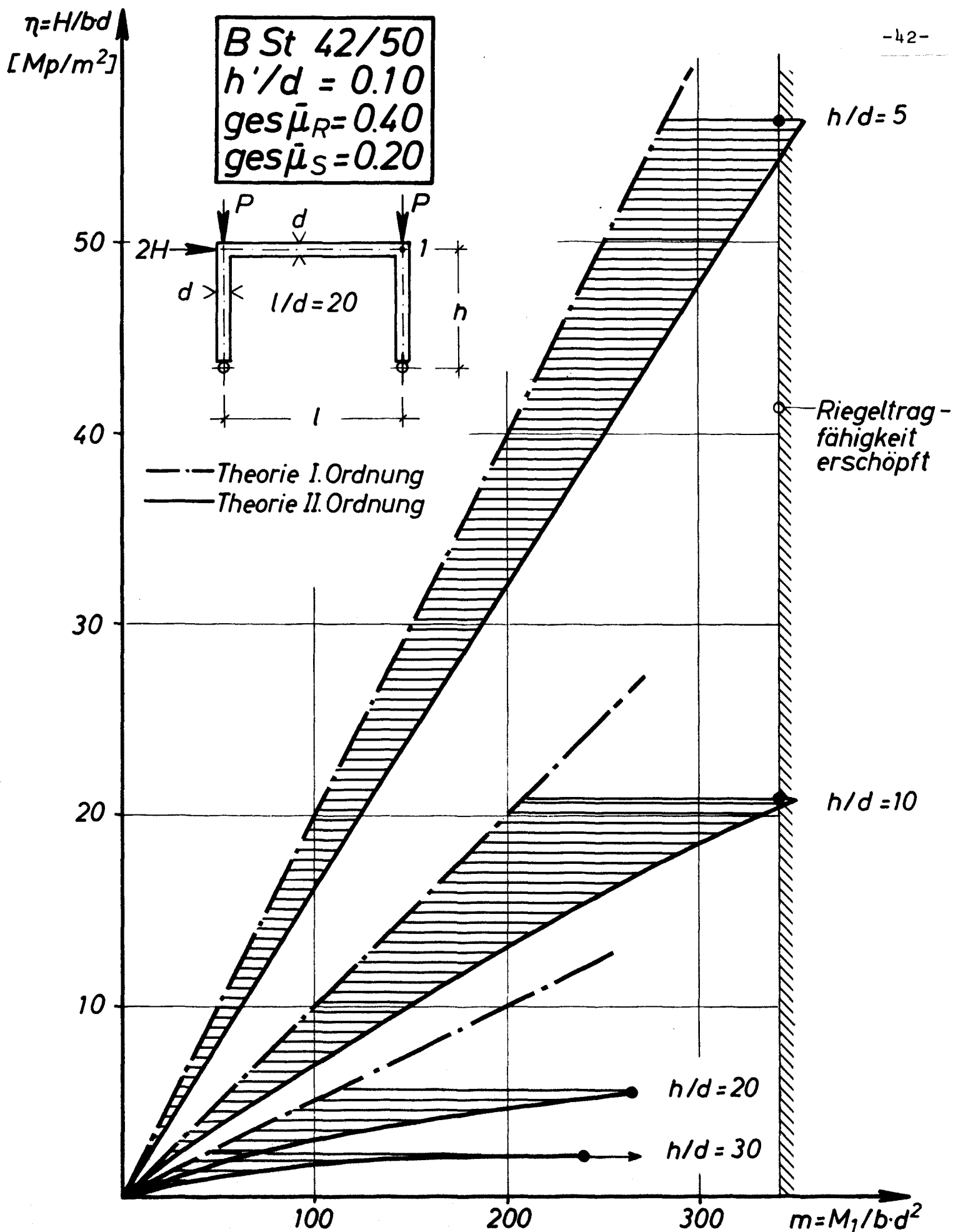
1. : H und P proportional gesteigert
2. : H = konst., P gesteigert
3. : H gesteigert, P = konst.

Als gemeinsamer Bezugspunkt der drei Belastungsgeschichten wurde die "Gebrauchslast" nach 1 unter Berücksichtigung eines pauschalen Sicherheitsbeiwertes von  $\gamma = 1,75$  gewählt.

Die Rechenergebnisse in Bild 24 und 25 zeigen die erzielbaren Schnittkraftvergrößerungen in Abhängigkeit von den jeweils gesteigerten Lastkomponenten P bzw. H.



**Bild 24** Tragverhalten verschieblicher Zweigelenkrahmen bei verschiedenen Belastungsgeschichten



**Bild 25** Tragverhalten verschieblicher Zweigelenrahmen unter ausschließlicher  $H$ -Last - Steigerung

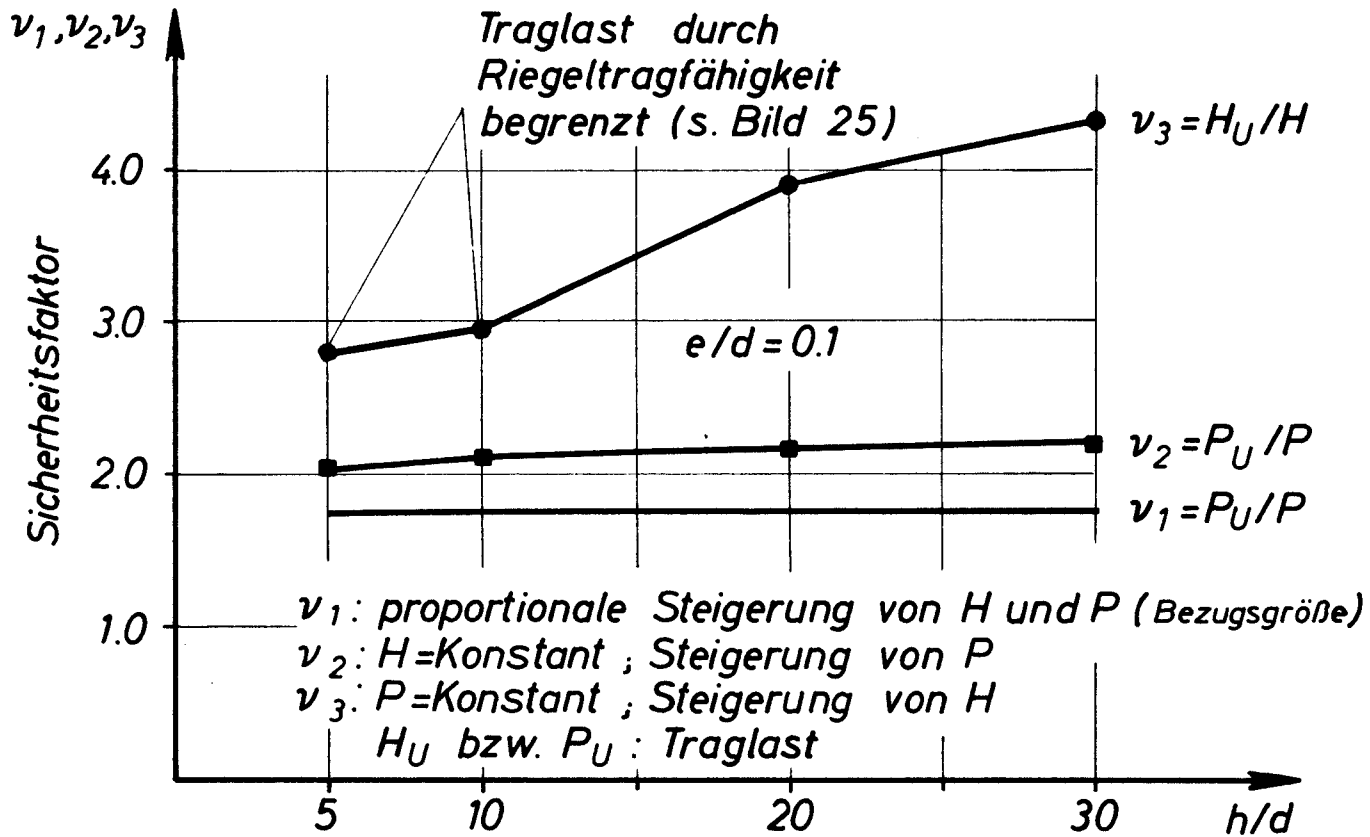


Bild 26 a Sicherheitsfaktoren bei verschiedenen Belastungsgeschichten

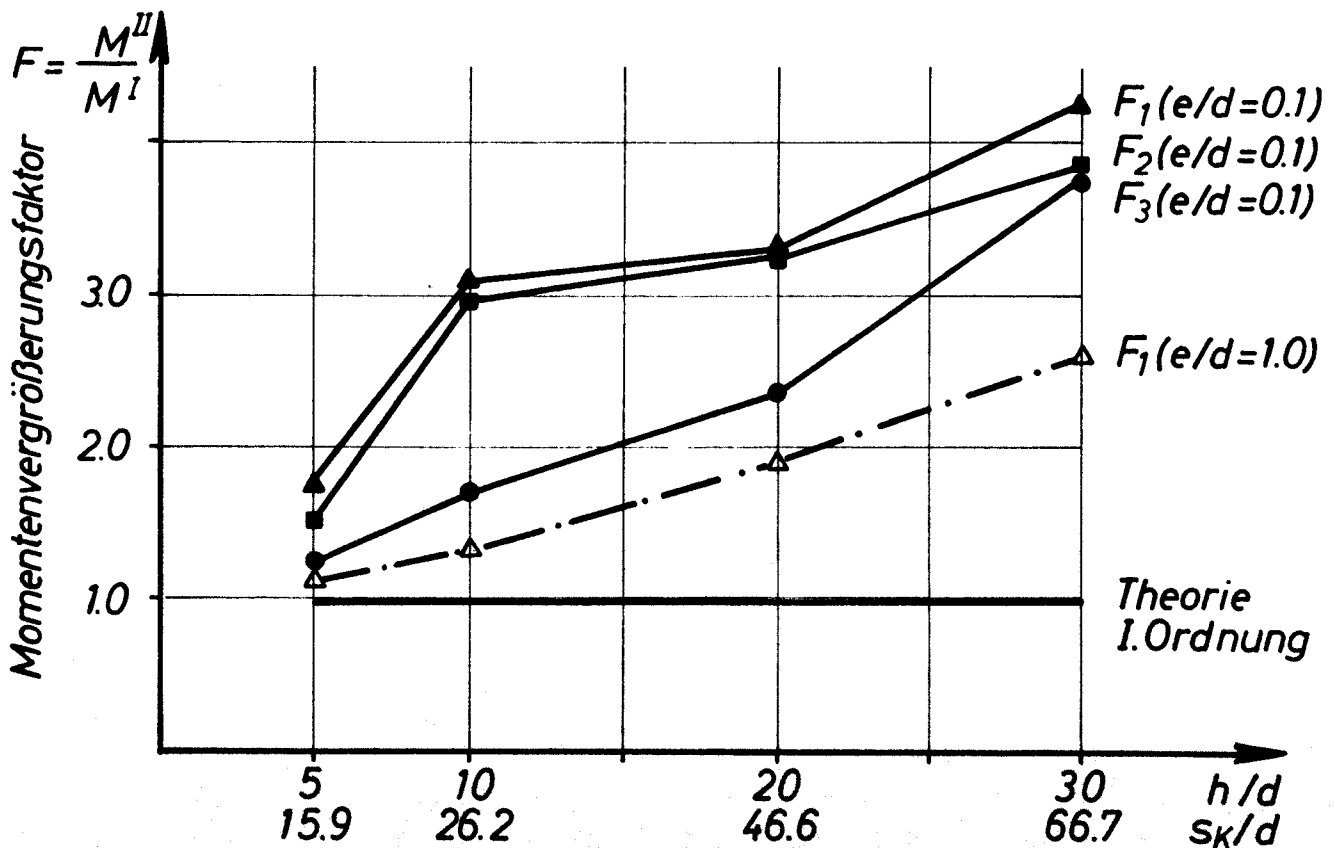


Bild 26 b Momentenvergrößerung bei verschiedenen Belastungsgeschichten

Das Bild 26a zeigt die errechneten pauschalen Sicherheitsbeiwerte  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  der drei Belastungsgeschichten. Das Bild 26b stellt die errechneten Momentenvergrößerungsfaktoren  $F = M^{II}/M^I$  (s. Gl. 3) dar.

Der in den Bildern 24 - 26 gezeigte Sachverhalt erlaubt, die Feststellung zu treffen, daß die ungünstigste Belastungsgeschichte der Fall 1 ist, also die proportionale Laststeigerung, hingegen die größten Sicherheitswerte im Fall 3 erzielt werden konnten. Die Erklärung dieses Verhaltens läßt sich aus Bild 24 ablesen. Im Fall 1 wird nämlich die planmäßige Ausmitte infolge der proportionalen Steigerung von H und P bewahrt, die Zusatzmomente nach Theorie II. Ordnung nehmen mit der Laststeigerung immer mehr zu. Im Fall 2 bewirkt dagegen eine Steigerung der axialen Belastung der Stiele P z.T. einen Abbau der planmäßigen Ausmitte, der zur Steigerung der Tragfähigkeit führt. Im Fall 3 nimmt die tatsächliche Lastausmitte mit der Steigerung der H-Last ständig zu; damit nimmt die Gefahr, einen Stabilitätsbruch zu erreichen, ab. Bild 25 zeigt, daß erst bei äußerst hohen Stielschlankheiten ( $h/d = 30 \rightarrow s_K/d = 66,7$ ) Stabilitätsversagen auftritt. Folglich konnte eine sehr hohe Laststeigerung ( $\gamma_3 = 2,8 - 4,3$ ) erzielt werden.

Konsequenz der eben aufgeführten Feststellungen ist, daß die Belastungsgeschichte die tatsächlich vorhandene Bauwerkssicherheit maßgebend beeinflusst. Die Annahme einer proportionalen Laststeigerung - wie es z.B. in DIN 1045 E, Abs. 17.4.9 verlangt wird - erwies sich in diesem Beispiel als die ungünstigste. (vgl. Bild 26a)

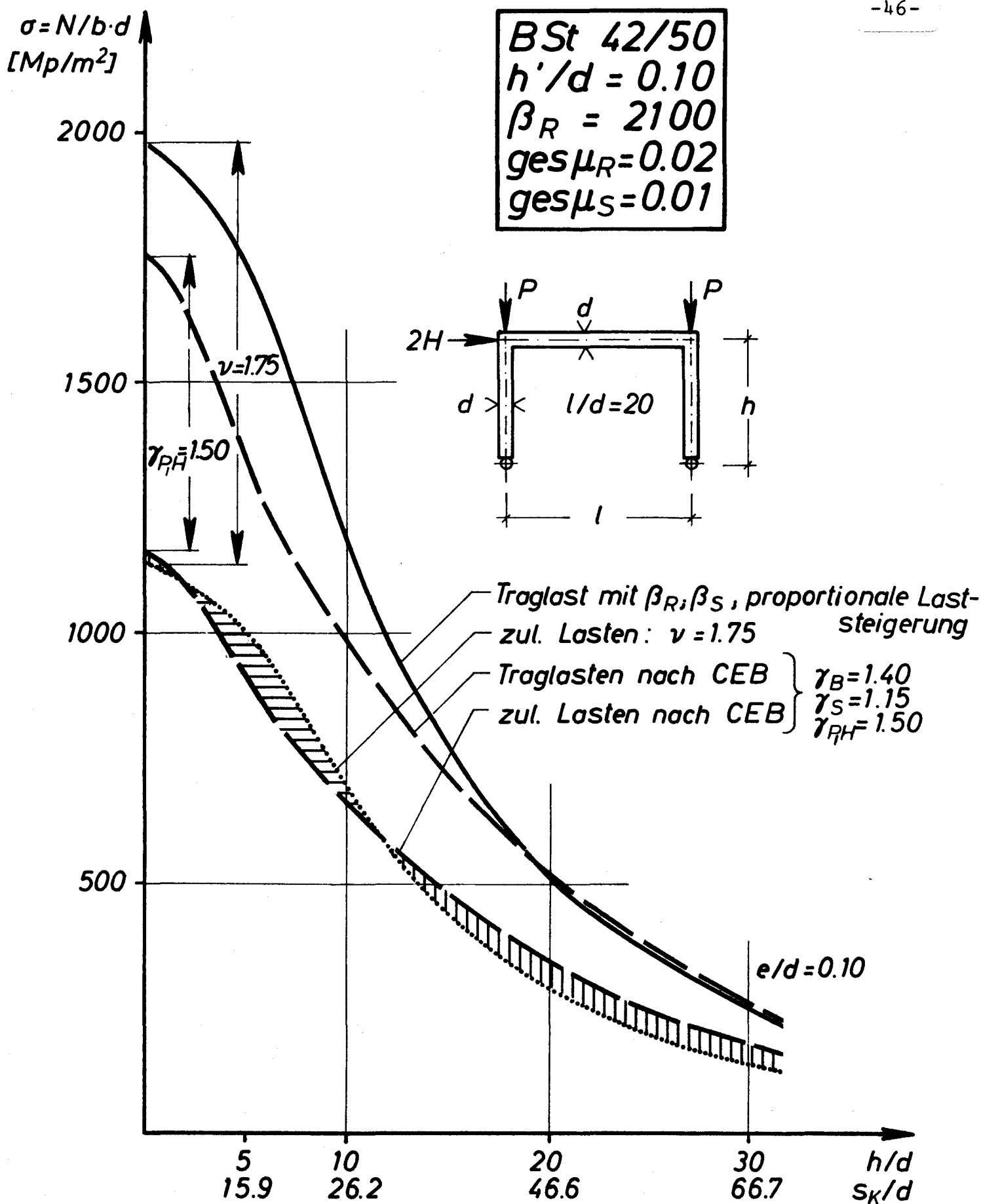
Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit wäre allerdings eine Belastungsgeschichte, die zwischen den Fällen 1 und 3 liegt, vorzuziehen. Hiermit wäre der Tatsache Rechnung getragen, daß die lotrechten (Gravitations-) Lasten in Wirklichkeit mit wesentlich geringerer Streuung (insbesondere bei hohem Eigengewichtsanteil) bestimmbar sind als die waagerechten (Wind-) Lasten. Diese Problematik führt zu der Notwendigkeit, die Bestimmung der einzelnen Last-Arten auf statistischen Grundlagen besser der Wirklichkeit anzupassen.

Dieses Problem bildet jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

### 3.2 Anwendung globaler und differenzierter Sicherheitsbeiwerte

Die Beurteilung der Sicherheit eines Bauwerks wird im allgemeinen durch Vergleich der Beanspruchungen mit der Beanspruchbarkeit vorgenommen. [1], [2] Die Durchführung eines solchen Vergleichs bei Stahlbetonrahmen ist zwar infolge des hochgradig nichtlinearen Verhaltens erschwert, sie läßt sich dennoch unter Voraussetzung definierter Systeme sowie Last- und Materialgrößen in Form einer strengen Verformungsrechnung bewältigen. Diese Verfahrensweise ist als "deterministisch" zu bezeichnen, da sie von streuungsfreien Größen ausgeht.

Die Beurteilung der Bauwerkssicherheit ist aber wirklichkeitsnäher und zutreffender, wenn die entsprechenden Last- und Materialgrößen als Zufallsvariable - ihrer Natur entsprechend - in die Tragfähigkeitsuntersuchung eingeführt werden. In diesem Falle kann nämlich die Versagenswahrscheinlichkeit des Systems als Maß für seine Zuverlässigkeit ermittelt werden [2], [3]. Diese auf die statistische Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauenden - "probabilistischen" Untersuchungen der Bauwerkssicherheit erfordern jedoch einen unverhältnismäßig hohen Rechenaufwand im Falle von Stabilitätsproblemen vorliegender Art, der die



**Bild 27** Anwendung globaler und differenzierter Sicherheitsbeiwerte

Kapazität der vorhandenen Rechenanlagen überschreitet. Erst kürzlich gelang es, einfache Stäbe auf ihre Stabilität probabilistisch zu untersuchen. Befriedigende Ergebnisse liegen jedoch noch nicht vor. Daher müssen vorläufig vereinfachte Untersuchungsmethoden für die Beurteilung der Bauwerkssicherheit herangezogen werden.

Ein möglicher Weg hierfür scheint die Einführung von Teilsicherheitsbeiwerten [2] , [4] zu sein, um zumindest die Streuungen der Last- und Materialkennwerte getrennt zu erfassen. Obwohl hierdurch kein genaues Bild von der Versagenswahrscheinlichkeit des Systems gewonnen werden kann, könnte diese Verfahrensweise - wegen ihrer Einfachheit - von großer Bedeutung sein, da zumindest die Empfindlichkeit der Systemtragfähigkeit gegenüber Streuungen der wichtigsten Einflußgrößen aufgezeigt werden kann. (Für praktische Berechnungen bleibt - neben den globalen Sicherheitsbeiwerten - vorläufig ohnehin keine andere Nachweismöglichkeit übrig).

Aus diesen Gründen wird auf den Versuch, "probabilistische" Untersuchungen anzustellen, verzichtet, statt dessen werden Vergleiche zwischen Traglasten von Stahlbetonrahmen unter Anwendung von globalen bzw. differenzierten Sicherheitsbeiwerten durchgeführt. Die verwendeten Sicherheitsbeiwerte gleichen einerseits der neuen DIN 1045 ( $\gamma_{\text{global}} = 1,75$ ), andererseits den CEB-Empfehlungen vom Juni 1970 ( $\gamma_{\text{Beton}} = 1,40$ ,  $\gamma_{\text{Stahl}} = 1,15$  und  $\gamma_{\text{Lasten}} = 1,50$ ).

Die errechneten Traglasten beider Versionen - bezogen auf einen verschieblichen Zweigelenkrahmen - sind im Bild 27 dargestellt. Dem Bild ist zu entnehmen, daß im Bereich größerer Stielschlankheiten ( $h/d > 18$ ,  $s_K/d \sim 40$ ) die Traglasten beider Rechnungen nur wenig voneinander abweichen. Dies Verhalten liegt darin begründet, daß bei



beiden Versionen der Traglastrechnung der geometrische Bewehrungsgrad ( $\mu = \mu' = F_e/b \cdot d = F_e'/b \cdot d$ ) konstant gehalten wurde, die Tragfähigkeit jedoch bekanntlich im wesentlichen vom mechanischen Bewehrungsgrad abhängt.

( $\bar{\mu} = \bar{\mu}' = \mu \cdot \beta_s/\beta_R = \mu' \cdot \beta_s/\beta_R$ ) So bewirkt eine ungleiche Reduktion der Baustoffkennwerte ( $\gamma_B = 1,4, \gamma_s = 1,15$ ):

- Eine Erhöhung des mechanischen Bewehrungsgrades und damit eine Erhöhung der Tragfähigkeit der Druckstäbe des Systems,
- Eine Reduktion der Stabsteifigkeiten durch Verringerung des von der Rechenfestigkeit ( $\beta_R/\gamma_B$ ) abhängigen Elastizitätsmoduls des Betons.

---

Die Berechnung zeigt, daß sich - im untersuchten Bereich der Einflußgrößen - die beiden einander entgegengerichteten Auswirkungen der Festigkeitsreduktion weitgehend aufheben: die Traglasten bleiben invariant .

Aus der Invarianz der Traglasten im Bereich großer Schlankheiten der Stiele folgt, daß hier entscheidend für die Systemtragfähigkeit die Annahme der Belastungshöhe ist. Folglich: solange keine gesicherten statistischen Angaben für die Lastannahmen vorliegen, ist die Anwendung eines etwas vorsichtigen Sicherheitsbeiwertes für die Lasten zu empfehlen (wie z.B. in DIN 1045 § 17.  $\gamma = 1,75$ ) Die CEB-Empfehlungen liefern hingegen etwas zu unvorsichtige Werte. Gelegentlich der Beratungen zu DIN 1045 neu wurde auch die Einführung von Teilsicherheitsbeiwerten diskutiert. Dies ist jedoch im Gedankenaustausch mit dem Institut für Bautechnik/Berlin verworfen worden, nicht zuletzt wegen der erkannten Gefahrenquelle, die hier eben aufgezeigt wurde.

Im Bereich kleiner Stielschlankheiten ( $h/d < 12, s_K/d < 30$ ) des untersuchten Systems liefern CEB und DIN 1045 neu auch etwas abweichende zulässige Lasten. Die in Bild 27 dargestellte Abweichung von max. 12 % läßt sich jedoch auf den relativ hoch gewählten Teilsicherheitsbeiwert für Beton ( $\gamma_B = 1,40$ )

nach CEB zurückführen. Untersuchungen von Bauwerksfestigkeiten - wie z.B. die aus [6] - zeigten, daß unter heute üblichen Baustellen- und Überwachungsbedingungen eine Abminderung der Bauwerksfestigkeit um den Faktor 0,85 gegenüber der nach Gütewürfelsätzen nachgewiesenen Festigkeit zu erwarten ist. Dies würde einem Teilsicherheitsbeiwert von  $\gamma_{B,1} = 1,18$  entsprechen. Der Sicherheitsbeiwert  $\gamma_B$  muß jedoch außer dem Einfluß einer allgemeinen Festigkeitsabminderung auch die Auswirkungen von örtlichen Fehlstellen berücksichtigen. Der Wert  $\gamma_B = 1,40$  erscheint dennoch etwas zu konservativ, da der Einfluß von örtlichen Fehlstellen auf das Verformungsverhalten von Systemen recht gering ist, weil diese nur - entsprechend der Länge der Fehlstelle - geringe Verformungsanteile liefern.

Aus den erläuterten Gründen scheint die Wahl von  $\gamma_B = 1,40$  nach CEB etwas zu vorsichtig, es dürfte der Wert  $\gamma_B = 1,3$  bei den heutigen Baustellen- und Kontrollbedingungen in der BRD ausreichend sein.

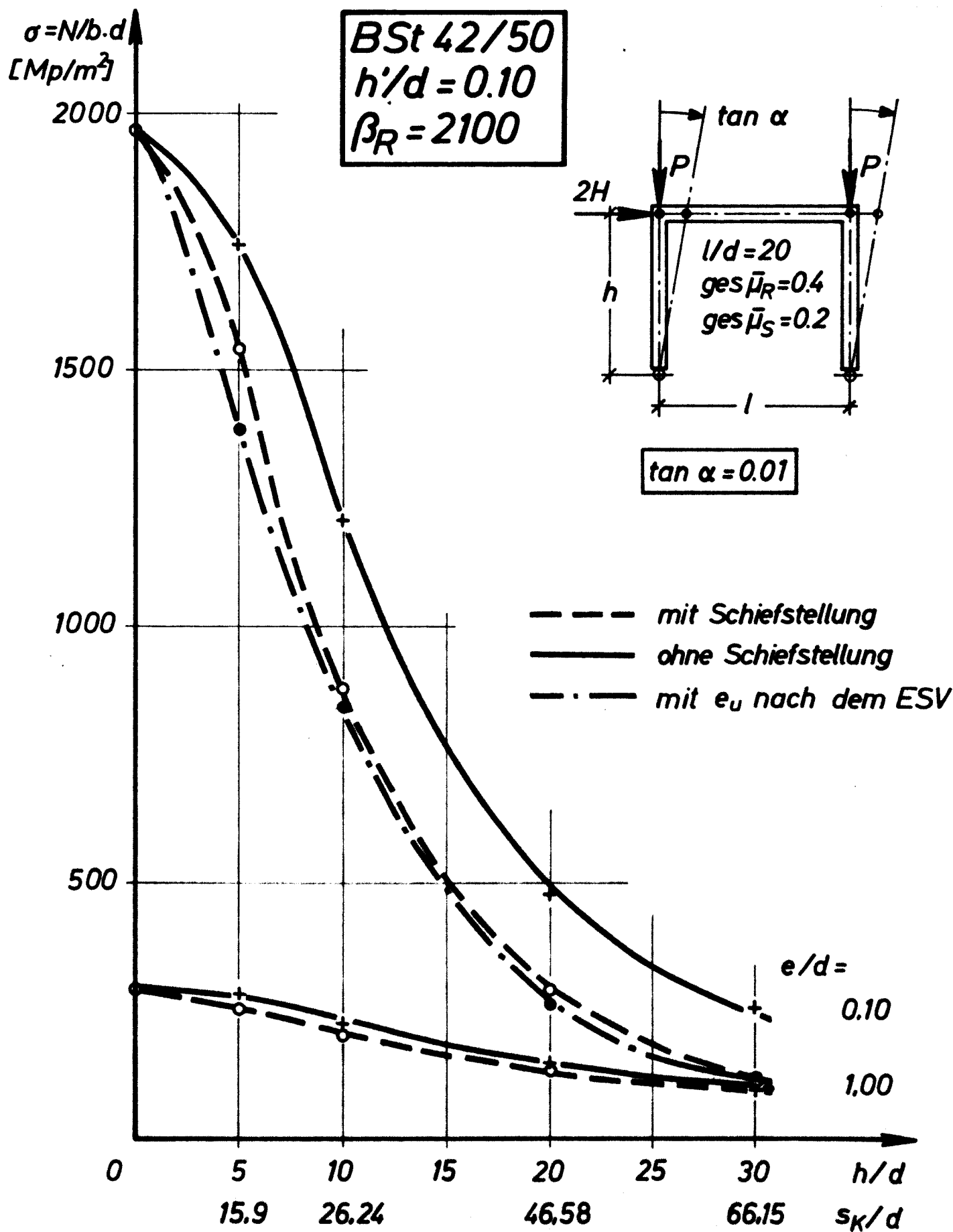
### 3.3 Anwendung des "Ersatzstabverfahrens" (ESV)

In Bild 23 wurden Traglasten des verschieblichen Systems mit denen nach dem Ersatzstabverfahren bestimmten entsprechenden Werten verglichen. Dabei zeigte sich die wesentliche Rolle der aussteifenden Riegelbewehrung. Ist die Riegelbewehrung in der Lage, die Verformungsmomente der Knoten aufzunehmen, so liefert das ESV auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse. Dagegen kann bei unzureichend bewehrten Riegeln die Tragfähigkeit der Stiele nicht ausgeschöpft werden. Folglich müssen die Riegel auf die Momente nach Theorie II. Ordnung bemessen werden, was streng nur mit Hilfe einer Verformungsrechnung möglich ist. Wenn aber die

Verformungsmomente näherungsweise - z.B. nach den Hilfsmitteln der DIN 4224 E - bestimmt und den Riegeln zugewiesen werden, so ist das einfache und praktische ESV gut anwendbar. Bei Anwendung des ESV werden die Knicklängen nach der Elastizitätstheorie bestimmt. Zur Knicklängenbestimmung benötigt man die Steifigkeiten aller Systemstäbe. Diese sind beim Baustoff Stahlbeton bekanntlich beanspruchungsabhängig. Um dieser Eigenschaft näherungsweise Rechnung zu tragen, kann eine Reduktion der Biegesteifigkeiten der aussteifenden Riegel bei der Knicklängenbestimmung vorgenommen werden, um auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse zu erhalten. (vgl. Vorschlag in [5]). Zur Überprüfung der Notwendigkeit einer Reduktion der Steifigkeiten wurde hier der Einfluß einer Abminderung der Riegelsteifigkeiten auf 50 % der Steifigkeit des ungerissenen Betonstabes vorgenommen. Diese starke Abminderung der Riegelsteifigkeiten (s. Bild 23: Anwendung des reduzierten Knicklängenbeiwertes  $\beta_{RED}$ ) führt zu erhöhten Knicklängenbeiwerten und zu entsprechend mehr auf der sicheren Seite liegenden ESV-Traglasten. In den gerechneten Fällen ist also keine Reduktion der Riegelsteifigkeiten notwendig, wenn die Riegel hinreichend bewehrt sind. Diese Feststellung ist damit zu erklären, daß nicht nur die Riegelsteifigkeiten infolge Aufreißen, sondern auch die Stielsteifigkeiten infolge Normalkrafteinfluß abnehmen. Die Größe der Knicklänge hängt im wesentlichen vom Verhältnis beider Steifigkeiten ab.

### 3.4 Schiefstellung des Systems

Die Empfindlichkeit der Tragfähigkeit schlanker Einzelstäbe im Bereich kleiner planmäßiger Lastausmitten auf deren Streuungen ist bekannt (s.z.B. [5]). Um diesem Einfluß Rechnung zu tragen, werden in Vorschriften zusätzlich sogenannte ungewollte Lastausmitten angeordnet. Die Festlegung dieser



**Bild 28** Einfluß einer Schiefstellung des Systems

Lastausmitten ist anhand von Untersuchungen an einfachen Stäben vorgenommen worden, deshalb sind sie z.B. an die Knicklängen gebunden. Ganze Systeme können jedoch praktischer mit Hilfe einer gleichwertigen Schiefstellung analysiert werden. Der Einfluß einer vorgegebenen Schiefstellung wird im vorliegenden Kapitel untersucht. Die Größe der Schiefstellung ist mit

$$\tan \alpha = 0,01$$

angenommen worden.

Die Ergebnisse der Traglastberechnungen sind in Bild 28 im Vergleich mit den entsprechenden Werten ohne Einrechnung einer Schiefstellung angegeben. Vergleichsweise sind auch Traglasten des Standardstabes unter Einrechnung der ungewollten Ausmitte nach DIN 1045 neu dargestellt. Es zeigt sich, daß die gewählte Schiefstellung ähnlichen Einfluß hat beim Nachweis am Gesamtsystem, wie die ungewollte Ausmitte bei Anwendung des Ersatzstabverfahrens. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem Vorschlag für die Schiefstellung nach [7] Gl. (102) bzw. (103).

#### 4. Rechentechnische Probleme

Das bislang verwendete Rechenverfahren zur Traglastbestimmung ist entwickelt worden, um eine möglichst strenge, wirklichkeitsnahe Lösung des Problems zu erhalten. Die Vorteile der strengen Lösung sind allerdings durch einen erheblichen Rechenaufwand erkauft worden. (Eine Rahmentraglast ist an der Rechanlage des Instituts für Baustoffkunde und Stahlbetonbau in 0,5 - 3,0 Stunden, je nach Anzahl der erforderlichen Laststufen zu errechnen. Die gleiche Rechnung auf der Großanlage der Technischen Universität Braunschweig benötigt 3 - 18 Minuten. Im ersten Falle handelt es sich um eine IBM 1130/16 K, im anderen Falle um eine ICL 1907/64 K Digitalanlage).

Die rechentechnischen Erfahrungen zeigen, daß in den Bereichen ausgeprägter Nichtlinearität des Verformungsverhaltens (Fließen der Bewehrung, große Stielschlankheiten), also etwa in den letzten 10 % der Tragkapazität des Systems eine unverhältnismäßig hohe Anzahl von Laststufen erforderlich ist, um an den definierten Traglastzustand zu kommen. Aus diesen Gründen wurden parallel zu den im 1. und 2. Teil dieses Berichtes durchgeführten Untersuchungen Wege gesucht, rationeller zu einer Traglastbestimmung zu gelangen. Die erarbeitete Lösung und die damit erzielten Rechenergebnisse sind im 3. Teil enthalten.

## 5. Zusammenfassung

Das Trag- und Verformungsverhalten unverschieblicher und verschieblicher Zweigelenkrahmen aus Stahlbeton wurde mit Hilfe eines strengen Rechenverfahrens, das dem Simulieren von Versuchen gleichkommt - siehe 1. Teil des Berichtes vom November 1969 - untersucht.

Das grundsätzliche Tragverhalten unverschieblicher Systeme läßt sich durch die starke Schnittkraftumlagerung bei steigender Belastung charakterisieren, während das von verschieblichen Systemen durch einsinnige Schnittkraftvergrößerung gekennzeichnet ist. Der Grund dieses Verhaltens liegt in der verschiedenartigen Auswirkung der Zusatzmomente infolge Ausbiegungen der Stäbe bei den beiden betrachteten Systemtypen sowie im Einfluß des unelastischen Werkstoffgesetzes. (Überlagerung geometrischer und stofflicher Nichtlinearitäten).

Infolge der starken Schnittkraftumlagerungen bei unverschieblichen Systemen können z.T. beträchtliche Traglaststeigerungen (bis zu 60 % bei Stielausmitten  $e/d \geq 0,30$ ) bei zunehmender Stielschlankheit auftreten. Um die volle Tragfähigkeit des Systems auszuschöpfen, ist in einzelnen Fällen eine entsprechende Dimensionierung der aussteifenden Riegelfelder für die Verformungsmomente notwendig. Allerdings darf in Übereinstimmung mit DIN 1045, Abs. 17.4.5 "in üblichen Hochbauten .... auf einen rechnerischen Nachweis der Aufnahme dieser Zusatzbeanspruchungen in den unmittelbar anschließenden aussteifenden Bauteilen verzichtet werden." Hierbei wird der Tatsache Rechnung getragen, daß bei üblichen Hochbauten selten hohe, die Schnittkraftumlagerungen entscheidend beeinflussende Stielschlankheiten vorkommen. In diesem Zusammenhang sollten unverschiebliche Rahmensysteme, deren Stiele schlanker als  $s_K/d \sim 25$  sind, nicht mehr als "übliche Hochbauten" betrachtet werden. In diesen Fällen muß eine Dimensionierung der aussteifenden Riegel für das Riegelfeldmoment nach Theorie II. Ordnung vorgenommen werden. Zur Abschätzung dieses Momentes wird ein Näherungsverfahren in DIN 4224 (Heft 220 des DAfStb) vorgeschlagen.

Aussteifende Riegel verschieblicher Systeme sind hingegen an den Knotenpunkten immer auf die Verformungsmomente entsprechend zu bemessen, um die Systemtragfähigkeit optimal ausnutzen zu können. Eine strenge Bemessung kann nur mit Hilfe einer Verformungsrechnung durchgeführt werden.

Die Traglast verschieblicher Systeme hängt stark von der Art der Kombination einzelner Lastkomponente ("Belastungsgeschichte") ab. Es ist festgestellt worden, daß in den hier untersuchten Fällen die ungünstigste "Belastungsgeschichte" im Falle zweier Lastkomponente (hier lotrechte und waagerechte) die proportionale Laststeigerung ist.

(D.h. ausgehend von einem definierten Gebrauchszustand liefert dieses den kleinsten Lastfaktor bis zum Erreichen des Traglastzustandes.)

Im Hinblick auf eine wirklichkeitsnähere Beurteilung der Bauwerkssicherheit sind Vergleiche zwischen Traglastrechnungen unter Anwendung globaler und Teilsicherheitsbeiwerte aufgestellt worden. Es zeigte sich, daß im Bereich großer Stielschlankheiten ( $s_k/d > 30$ ) eine Reduktion der Materialfestigkeiten wenig geeignet ist, die rechnerische Bauwerkssicherheit zu gewährleisten. Daher sind zutreffende Lastannahmen von besonderer Bedeutung.

Die Anwendbarkeit des Ersatzstabverfahrens ist durch einzelne Berechnungen bestätigt worden. Dabei zeigte sich die Notwendigkeit, die aussteifenden Riegel verschieblicher Systeme hinreichend auch zur Aufnahme der Verformungsmomente zu bemessen. (s. Bild 23)

Zur Berücksichtigung unplanmäßiger Systemabweichungen wurden Vergleichsrechnungen zwischen Systemtraglasten mit und ohne Einrechnung einer unplanmäßigen Schiefstellung des Systems durchgeführt. Es zeigte sich, daß eine Schiefstellung von  $\tan \alpha = 0,01$  annähernd gleichen traglastmindernden Einfluß bewirkt, wie die ungewollte Ausmitte für Knickstäbe nach DIN 1045 E, Abs. 17.4.6.

Ergänzend zu den Traglastrechnungen unverschieblicher Systeme wurden konstante, integrierte Ersatzstabsteifigkeiten errechnet, um Vereinfachungsmöglichkeiten der Verformungsrechnung zu finden. Es zeigte sich, daß Druckglieder (Stiele) und Biegeglieder (Riegel) voneinander abweichende, charakteristische Ersatzsteifigkeiten besitzen. So bleibt die Stabsteifigkeit der Biegeglieder mit hochwertiger Armierung (BSt 42/50) im gesamten Beanspruchungsbereich annähernd konstant. Ihre Größe hängt im wesentlichen nur vom Bewehrungsgrad ab. Die Steifig-



keitswerte der Stiele hingegen nehmen mit zunehmendem axialen Beanspruchungsgrad ab. Ihre Größe ist von zwei wesentlichen Parametern abhängig, nämlich vom mechanischen Bewehrungsgrad  $\bar{\mu} = \mu \cdot \beta_S / \beta_R$  und vom axialen Beanspruchungsgrad  $P/P_0$ .

### **3. Teil**

## I N H A L T

### 1. Einleitung

- 1.1 Problemstellung, Zielsetzung
- 1.2 Überblick über die Rechenverfahren, Rechen-und Versuchsergebnisse der verwendeten Literatur
- 1.3 Notwendigkeit der Entwicklung eines Verfahrens zur näherungsweise Berechnung der Tragfähigkeit von Stahlbetonrahmen

### 2. Verfahren zur näherungsweise Berechnung der inelastischen Grenzlast von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

#### 2.1 Voraussetzungen

- 2.1.1 Definition der inelastischen Grenzlast
- 2.1.2 Einschränkungen der Anwendbarkeit des Rechenverfahrens

#### 2.2 Rechengrundlagen

- 2.2.1 System und Bezeichnungen
- 2.2.2 Rechenannahmen
- 2.2.3 Ein effektives, strenges Verfahren zur Bestimmung der Momenten-Krümmungsbeziehungen
- 2.2.4 Einführung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" für prismatische, symmetrisch bewehrte Stahlbetonstäbe mit Rechteckquerschnitt
- 2.2.5 Untersuchungen über die Gültigkeit der Annahme konstanter, "wirksamer Stabsteifigkeiten"

#### 2.3 Stabsysteme mit nichtlinearem Lastverformungsverhalten

- 2.3.1 Linearisierung der Last-Verformungsbeziehung durch Anwendung der dem Beanspruchungs-Verformungszustand angepassten "wirksamen Stabsteifigkeiten"
- 2.3.2 Anwendung des Weggrößenverfahrens der Elastizitätstheorie für die Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung
- 2.3.3 Diskussion der Ergebnisse der Elastizitätstheorie
- 2.3.4 Matrizen-Darstellung der Ergebnisse der Elastizitätstheorie

- 2.4 Rechenprogramm zur näherungsweisen Bestimmung der inelastischen Grenzlast von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton
  - 2.4.1 System und Belastungen
  - 2.4.2 Formulierung des Verformungsproblems in Matrizen-Darstellung
  - 2.4.3 Iterative Bestimmung der Systemverformungen unter vorgegebener Belastung
  - 2.4.4 Steuerung der Laststeigerung über die Lastverschiebungsdiagramme.  
Kriterien für die inelastische Grenzlast
  - 2.4.5 Sonderfall: unverschiebliches System
  - 2.4.6 Rechentechnische Probleme
  - 2.4.7 Konvergenz der iterativen Berechnung der Systemverformungen

### 3. Systematische Untersuchungen des Trag- und Verformungsverhaltens von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

- 3.1 Ein repräsentatives Teilsystem
  - 3.1.1 Übertragung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 auf das Teilsystem
  - 3.1.2 Diskussion der Ergebnisse
  - 3.1.3 Sonderfall: Stabknicken
- 3.2 Berechnung von inelastischen Grenzlasten für den praktischen Bereich der Einflußgrößen
  - 3.2.1 Voruntersuchungen auf elastizitätstheoretischen Grundlagen
  - 3.2.2 Berechnung inelastischer Grenzlasten für unverschiebliche Systeme
    - 3.2.2.1 Systeme, bei denen die Stiele einsinnig gekrümmt sind
    - 3.2.2.2 Systeme, bei denen die Stiele gegenläufig gekrümmt sind
  - 3.2.3 Berechnung inelastischer Grenzlasten für unverschiebliche Systeme

- 3.2.3.1 Nichtlineares Verformungsverhalten und inelastische Einspannung verschieblicher Rahmenstiele
- 3.2.3.2 Einfluß der geometrischen aussteifenden Wirkung der Riegel auf die Grenzlast
- 3.2.3.3 Einfluß der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast
- 3.2.3.4 Einfluß der Riegelbewehrung auf die aussteifende Wirkung der Riegel
- 3.2.3.5 Aus Belastungsart und -anordnung herrührende Einflüsse

### 3.3 Untersuchungen über die "wirksamen Stabsteifigkeiten"

### 3.4 Näherungsansätze zur Bestimmung der "wirksamen Stabsteifigkeiten"

## 4. Interaktion der Tragfähigkeit der Riegel und Stiele eines Rahmenknotens

- 4.1 Analytisch angenäherte Interaktionskurven der Bruchschnittgrößen von den Stäben eines idealisierten Rahmenknotens
- 4.2 Analytische Bestimmung einer stabilisierenden Riegelbewehrung des idealisierten Rahmenknotens
- 4.3 Vorschlag für eine direkte Bemessung

## 5. Kritische Betrachtungen über mögliche und praktische Nachweisverfahren der Stabilität von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

- 5.1 Anwendbarkeit des "Ersatzstabverfahrens"
- 5.2 Nachweis an repräsentativen Teilsystemen
- 5.3 Nachweis am Gesamtsystem

## 6. Zusammenfassung

### I. Schrifttum

### II. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen

I. Schrifttum

- [1] Baker, A.L.L.: "The ultimate load theory applied to the design of reinforced and pre-stressed concrete frames"  
Concrete Publications, London, 1956, Chapter IV.
- [2] Beck, H.: "Stabilität und Werkstoffverhalten im Stahlbetonbau"  
Deutscher Beton-Verein, Vorträge Betontag 1969, S. 169.
- [3] Bleich, F.: "Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen"  
Der Eisenbau, 1919, S. 27.
- [4] Bochmann, W. und S. Röbert: "Knickversuche mit Zweigelenkrahmen aus Stahlbeton"  
DAfStb, Heft 171, Berlin 1965, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn.
- [5] Bouma, A.L.: "De stabiliteit van hoge gebouwen, uitgevoerd als raamwerken van gewapend of ongewapend beton"  
Cement 1969, H.4, S.150 und H.5, S.199-205.
- [6] Breen, J.E.: "The Restrained long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame"  
Dissertation, Austin, Texas, June 1962.
- [7] Breen, J.E. and P.M. Ferguson: "The Restrained long Concrete Column as a Part of a Rectangular Frame"  
ACI Journal, Proceedings V.61, No.5, May 1964, pp.563-588.
- [8] Broms, B. and I.M. Viest: "Long Reinforced Concrete Columns"  
Symposium Transactions, ASCE, V.126, Part 2, 1961.
- [9] Bubenheim, H.J.: "Ein Beitrag zur Berechnung von Rahmensystemen mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz"  
Dissertation, TH Darmstadt, D 17 1969.
- [10] Bürgermeister, G. und H. Steup und H. Kretzschmar: "Stabilitätstheorie"  
Teile I und II. Akademie Verlag, Berlin 1963.
- [11] Chang, W.F.: "Inelastic Buckling and Sidesway of Concrete Frames"  
ASCE Proceedings Vol 93, April 1967, p. 287-299.

- [12] Chwalla, E.: "Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen"  
Der Bauingenieur 1938, Februar, S. 69-75.
- [13] Chwalla, E. und F.Jokisch: "Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens"  
Der Stahlbau, 14. Jahrgang, April 1941, Heft 8, S.33-37, und Heft 9, S. 47-51.
- [14] Chwalla, E.: "Hilfstafeln zur Berechnung von Spannungsproblemen der Theorie zweiter Ordnung und von Knickproblemen"  
Stahlbau-Verlag Köln, 1959.
- [15] Cranston, W.B.: "A Computer Method for Inelastic Analysis of Plane Frames"  
Technical Report, Cement and Concrete Association, London 1965, TRA 402.
- [16] Cranston, W.B.: "Tests on Reinforced Concrete Frames. 1.: Primed Portal Frames"  
Technical Report, Cement and Concrete Association, London 1965, TRA 392.
- [17] Cranston, W.B., and A.K. Chatterji: "Computer Analysis of Reinforced Concrete Portal Frames with Fixed Feet"  
Technical Report, Cement and Concrete Association, London 1970, TRA 444.
- [18] Duddeck, H.: "Statik der Stabwerke"  
Betonkalender 1970, W. Ernst und Sohn Berlin, S. 442-456.
- [19] Engesser, F.: "Über Knickfestigkeit gerader Stäbe"  
Z.Arch.u.Ing.Ver.zu Hannover, Bd.35, S.455, 1889.
- [20] Fey, T.: "Vereinfachte Berechnung von Rahmensystemen des Stahlbetonbaus nach der Theorie 2. Ordnung"  
Der Bauingenieur, 1966, Heft 6, S. 231-238.
- [21] Ferguson, P.M. and J.E. Breen: "Investigation of the Long Concrete Column in a Frame Subject to Lateral Loads"  
Symposium on Reinforced Concrete Columns ; ACI Publication SP-13, Detroit 1966.

- [22] Furlong, R.W. and P.M. Ferguson: "Test of Frames with Columns in Single Curvature"  
Symposium on Reinforced Concrete Columns; ACI Publication SP-13, Detroit 1966.
- [23] Gurfinkel, G. and A. Robinson: "Determination of Strain Distribution and Curvature in a Reinforced Concrete Section Subjected to Bending Moment and Longitudinal Load"  
ACI Journal, Proceeding V. 64, No.7, July 1967, pp. 398-402.
- [24] Habel, A.: "Die Knicklänge der Rahmenstiele aus Stahlbeton"  
Beton-und Stahlbetonbau, November 1958, S. 273-275.
- [25] Habel, A.: "Knickberechnung freistehender Stahlbetonrahmen"  
Beton-und Stahlbetonbau, Februar 1959, S. 25-31.
- [26] Hognestad, E.: "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members"  
University of Illinois Bulletin, Engineering Experiment Station, Bulletin Series No. 399, November 1951.
- [27] v. Kármán, Th.: "Untersuchungen über Knickfestigkeit"  
Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, H. 81, Berlin 1910.
- [28] Kordina, K.: "Stabilitätsuntersuchungen an Beton- und Stahlbetonsäulen"  
Dissertation TH München 1957.
- [29] Kordina, K.: "Die Grundlagen des Knicksicherheitsnachweises im Stahlbetonbau"  
Deutscher Beton-Verein, Vorträge Betontag 1967.
- [30] Kordina, K. und U. Quast: "Bemessungsverfahren für knickgefährdete Stahlbetondruckglieder"  
Mitteilung des Lehrstuhls für Stahlbeton-und Massivbau an der Technischen Universität Braunschweig, März 1969.
- [31] Kordina, K. und U. Quast: "Bemessung von schlanken Bauteilen - Knicksicherheitsnachweis"  
Betonkalender 1971, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin.



- [32] Kordina, K. und B. Jankó: "Stabilitätsuntersuchungen an Rahmensystemen, Teil I" Mitteilungen des Lehrstuhls für Stahlbeton-und Massivbau an der Technischen Universität Braunschweig, November 1969.
- [33] Kordina, K. und B. Warner: "Über den Einfluß des Kriechens auf die Traglast schlanker Stahlbetonstützen" Veröffentlichung in Vorbereitung.
- [34] Kordina, K. und B. Jankó: "Zur Bestimmung der Knicklängen von verschieblichen Stockwerksrahmen" Diskussionsbeitrag für den Entwurf DIN 4224, März 1971.
- [35] Livesley, R.K.: "Analysis of rigid frames by an electronic digitalcomputer" Engineering Vol. 176, No.4569, 21.August 1953, pp.230-233; No.4570 28. August 1953, pp. 277-278.
- [36] Livesley, R.K. "Automatic design of structural frames" Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol.9, No.3, September 1956, pp.257-278.
- [37] Livesley, R.K.: "Matrix Methods of Structural Analysis" Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [38] Lundquist, E.E.: "Stability of Structural Members under Axial Load" N.A.C.A. Technical Note No. 617, 1937.
- [39] Lundquist, E.E. and W.D. Kroll: "Tables of stiffness and carry-over factor for structural members under axial load" N.A.C.A. Technical Note No. 652, 1938.
- [40] MacGregor, J.G., J.E. Breen and E.O. Pfrang: "Design of Slender Concrete Columns" ACI Journal, Title No. 67-2, Jan. 1970
- [41] Manuel, R.F. and J.G. MacGregor: "The Behavior of Restrained Reinforced Concrete Columns under Sustained Load" Dissertation and Report No.2, 1966, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.
- [42] Pagay, S.N., P.M. Ferguson and J.E. Breen: "Importance of Beam Properties on Concrete Column Behavior" ACI Journal/October 1970, Pg.808-815.

- [43] Palotás, L.: "Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung von ecksteifen Stahlbetontragwerken"  
IVBH Abhandlungen, Band 24, 1964, S. 143-158.
- [44] Parme, A.L.: "Capacity of Restrained Excentrically Loaded Long Columns"  
Symposium on Reinforced Concrete Columns;  
ACI Publication SP-13, Detroit 1966.
- [45] Pflüger, A.: "Stabilitätsprobleme der Elastostatik"  
Springer Verlag, Berlin 1964.
- [46] Pfrang, E.O. and C.P. Siess: "Behavior of Restrained Reinforced Concrete Columns"  
Proceedings, ASCE, V.90, ST 5, Oct. 1964, Diskussion V. 91.
- [47] Puwein, M.G. "Die Knickfestigkeit des Rechteckrahmens"  
Bautechnik 1940, S. 32.
- [48] Quast, U.: "Geeignete Vereinfachungen für die Lösung des Traglastproblems der ausmittig gedrückten prismatischen Stahlbetonstütze mit Rechteckquerschnitt"  
Dissertation TU Braunschweig, 1970.
- [49] Rao, P.S. "Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte"  
DAfStb, Heft 177, Berlin 1967, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn.
- [50] Ratzersdorfer, J.: "Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken"  
Wien 1936.
- [51] Rüsch, H.: "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone"  
DAfStb, Heft 120, Berlin 1955, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn.
- [52] Sattler, K.: "Die Stabilität von Stockwerkrahmen mit seitlich unverschieblichen Knotenpunkten"  
Nachr.d.österr.Betonverein.  
Beilage z. österr.Bauzeitschrift (1953), S.62.

- [53] Sattler, K.: "Das 'Durchbiegungsverfahren' zur Lösung von Stabilitätsproblemen" Bautechnik 1953, S.288.
- [54] Schwarz, H. und Kasperek, K.: "Ein Beitrag zur Klärung des Tragverhaltens exzentrisch beanspruchter Stahlbetonstützen" Bauingenieur 1967.
- [55] Shanley, R.F.: "Inelastic Column Theory" Journal of Aeronautical Science, V.14, No.5, May 1947, p.261.
- [56] Wakabayashi, M.: "The Restoring Force Characteristics of Multi-Story-Frames" Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University, Kyoto, Japan, V.14, Part 2, Febr.1965.
- [41a] Monnier, Th.: "The moment-curvature relation of reinforced concrete" HERON, vol.17(1970) no.2 Mitteilungen der Institute I.B.B.C., Rijswijk (ZH) und STEVIN, Delft, Holland

## II. Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen

---

Einzelne Buchstaben wurden z.T. zugleich für die Bezeichnung mehrerer Größen angewendet, soweit dies nicht sinnstörend war.

$A, B, C$	Koeffizienten der Grundbeziehungen des Weggrößenverfahrens
$C_1, \dots$ usw.	Integrationskonstante der Differentialgleichung der Knickbiegeline
$C_1, C_1^*, C_s$ usw.	Konstante der Bestimmungsgleichung für eine stabilisierende Riegelbewehrung
$D$	Determinante
$E_b$	Ursprungsmodul der Arbeitslinie des Betons
$EI$	Biegesteifigkeit eines Querschnitts
$E_b I_b$	Biegesteifigkeit ohne Berücksichtigung der Bewehrung und Beanspruchung
$(EI)_w$	"wirksame Stabsteifigkeit"
$F_e, F_e'$	Stahlzug- bzw. -druckbewehrungsfläche
$H$	Horizontale Lastkomponente
$H_i, H_{ik}$	Stielquerkraft am Knoten "i"
$H_i^0$	Horizontale Lastkomponente am Knoten "i"
$H_\ell$	Stockwerkquerkraft am Riegel "l"
$I, I_R, I_S$	Trägheitsmomente
$K_i$	Krümmung des Querschnitts "i"
$K_u$	Grenzkrümmung
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems
$\underline{K}_{12}$ usw.	Steifigkeitsmatrizen der Einzelstäbe
$M$	Biegemoment
$M_{ik}, M_{ki}$	Stabendmoment am Knoten "i" bzw. "k"
$M_i^0, M_{ik}^0$	Volleinspannmoment am Knoten "i"
$M_i$	Biegemoment des Querschnitts "i"
$M_u$	Grenzmoment des Beanspruchungszustandes
$N, N_i$	Normalkraft eines Druckstabes bzw. im Querschnitt "i"; im Grenzfall der Beanspruchung: inelastische Grenzlast
$N_0$	Mittige Tragfähigkeit des Querschnitts
$P, P_{ik}$	Einzellasten
$P_i^0$	Einzellast am Knoten "i"
$P_v, P_R$	Versuchs- und rechnerische Traglast

# XI

$P_k$	Kritische Last, Grenzlaster
$Q, Q_i$	Riegelquerkräfte
$a$	Fußzeiger für äußere Schnittkräfte
$a_1$ usw.	Konstante in Knickbedingungen
$b_1$ usw.	" " "
$b, b_S, b_R$	Querschnitts- und Stabbreite
$d, d_S, d_R$	Querschnitts- und Stabdicken
$\underline{d}_1, \underline{d}_2$	Deformationsvektoren der Stabenden 1 bzw. 2 (Stabendbezeichnung vergl. Bild 2.7)
$\underline{d}_i$	Deformationsvektor des Knotens "i"
$\underline{d}$	Deformationsvektor des Gesamtsystems
$e, e_1, e_2$	Planmäßige Lastausmittungen
$h, h_S, h_R$	Statische Höhen von Querschnitten und Stäben
$h'$	Abstand des Schwerpunkts der Bewehrung vom Querschnittsrand
$h$	Stiellänge
$h_k$	Knicklänge
$i, k$	Ortsfußzeiger
$i$	Fußzeiger für innere Beanspruchung
$j$	Kopfzeiger der Iterationsschritte
$k, k_S, k_R$	Abminderungsfaktor der Querschnitts- bzw. Stab- steifigkeiten $k = EI/E_b I_b$ bzw. $= (EI)_w/E_b I_b$
$k$	Knotensteifigkeitszahl $\frac{\sum EI_R/\ell}{\sum EI_S/h}$
$k$	Stielsteifigkeit in Knickbedingungen $k = EI/h$
$\ell, \ell_{ik}$	Riegellänge
$\ell$	Stockwerkfußzeiger
$m$	Anzahl der Stützenstränge
$m$	Bezogenes Moment $m = M/b \cdot d^2 \cdot \beta_R$
$m_1$ , usw.	Grenzmomente eines sog. Interaktionspolygons
$n$	Anzahl der Riegel
$n$	Bezogene Normalkraft $n = N/d \cdot b \cdot \beta_R$
$n_o$	Anzahl der unbekannten Verformungskomponenten. Ordnung der Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$
$n_1$ , usw.	Koordinaten eines sog. Interaktionspolygons
$p_1, p_2$	Beanspruchungsvektoren der Stabenden 1-2
$p_i$	Lastvektor am Knoten "i"

## XII

$P_{ik}$	Beanspruchungsvektor des Stabes "ik" am Knoten "i"
$p$	Lastvektor des Gesamtsystems
$q, q_i$	Riegelquerlast [Mp/m]
$u$	Fußzeiger der Grenzbeanspruchung
$x$	Stablängskoordinate ) und Systemkoordinaten
$y, y_i, y_k$	Stabquerkoordinate )
$\alpha, \beta, \gamma$	Funktionen in Verbindung mit A, B, C
$\alpha, \alpha_R, \alpha_S$	Bezogene statische Höhe $\alpha = h/d$
$\alpha_{12}$ usw.	Koeffizienten
$\beta_R$	Rechenfestigkeit des Betons
$\beta_S$	Rechenfestigkeit des Stahls
$\beta$	Knicklängenbeiwert $\beta = h_k/h$
$\epsilon_1, \epsilon_2$	Randdehnungen eines Querschnitts
$\epsilon$	Stabkennzahl $\epsilon = h\sqrt{P/EI}$
$\epsilon_b, \epsilon_S = \epsilon_u$	Grenzdehnungen des Betons bzw. Stahls
$\varphi_i, \varphi_k$	Knotenverdrehungen
$\mu$	Geometrischer Bewehrungsgehalt $\mu = \frac{F_e}{b \cdot d}$
$\bar{\mu}$	Mechanischer Bewehrungsgehalt $\bar{\mu} = \frac{\beta_S}{\beta_R} \mu$
$v$	Axialer Beanspruchungsgrad $v = N/N_0$
$\psi$	Stabverdrehung $\psi = y/h$
$\sigma$	Spannung
$\xi$	Relative Stabkoordinate $\xi = x/l; x/h$

## 1. Einleitung

### 1.1 Problemstellung, Zielsetzung

Diese Arbeit untersucht das Trag-und Verformungsverhalten ebener Rahmensysteme aus Stahlbeton. Die Problematik liegt darin, daß es sich nicht um die Untersuchung isolierter Stäbe mit statisch bestimmt definierten Randbedingungen handelt, sondern daß die Interaktion der einzelnen Elemente des Systems - Stiele und Riegel - im wesentlichen mit erfaßt wird.

Die Methode, mit deren Hilfe die gestellte Aufgabe gelöst wird, ist die Simulationstechnik im Computer. Dabei werden ganze Rahmensysteme unter ansteigender Belastung nach Theorie II. Ordnung berechnet, wobei auch die nichtlinearen und unstetigen Verformungseigenschaften des heterogenen Baustoffes Stahlbeton berücksichtigt werden. Diese Verformungsrechnung liefert zugehörige Beanspruchungs-Verformungszustände am verformten System, deren Grenzfall das Stabilitätsversagen ist (siehe Bild 1.1), wenn nicht schon vorher

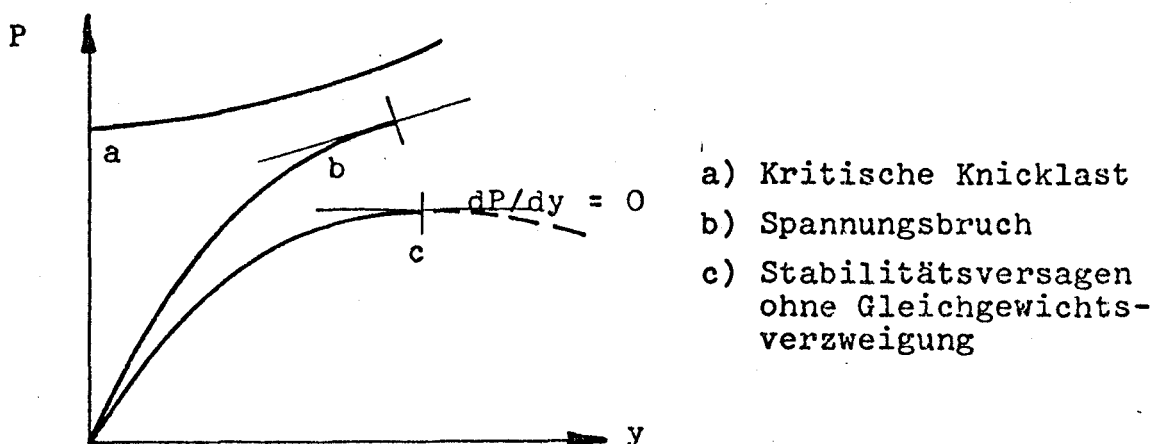


Bild 1.1: Last-Verformungsbeziehungen schlanker Rahmenstiele

- a) Hooke'scher Idealbaustoff und mittige axiale Beanspruchung
- b) Hooke'scher Idealbaustoff mit begrenzter Festigkeit unter Biegung mit Achsdruck
- c) Baustoff mit nichtlinearem Verformungscharakter und begrenzter Festigkeit (Stahlbeton unter Biegung mit Achsdruck)

die Tragkapazität irgendeines Systemquerschnittes infolge Überschreitung eines definierten Grenzzustandes erschöpft ist.

Um Verformungsrechnungen dieser Art durchführen zu können, bedarf es einer definierten Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen der einzelnen Systemquerschnitte. Das einfachste und im weiten Bereich der Baumechanik angewendete Werkstoffgesetz ist das von Hooke. Unter Annahme der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes werden die Knickprobleme der klassischen Elastostatik (siehe Bild 1.1, Kurve a) und die Spannungsprobleme nach Elastizitätstheorie (siehe Bild 1.1, Kurve b) gelöst. Das Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken weicht von den genannten Fällen z.T. erheblich ab (siehe Bild 1.1, Kurve c). Daher ist es notwendig, für diesen Baustoff besondere Untersuchungsmethoden anzuwenden.

Aus diesem Grunde sind in letzter Zeit eine ganze Reihe von Untersuchungen zur Klärung des Trag- und Stabilitätsverhaltens von Stahlbetonstäben durchgeführt worden (z.B. [1], [8], [26], [29], [46], [49], [51], [54] usw.) Diese Arbeiten schufen die Grundlagen für die Verformungsrechnung des Stahlbetons mit Hilfe inelastischer Werkstoffgesetze der Einzelbaustoffe. Zwar gibt es in den von verschiedenen Autoren (z.B. [26], [33], [41], [51], [54]) ermittelten oder angenommenen Arbeitslinien für Beton Unterschiede, dennoch können diese Grundlagen-wie Versuchsnachrechnungen bestätigen [7], [11], [16], [17], [21], [22], [32], [41], [44] - als brauchbar und ausreichend genau angesehen werden und für wirklichkeitsnähere Verformungsrechnungen zugrunde gelegt werden.

In den meisten bisher bekannten Untersuchungen beschränken sich die Verfasser auf das Studium einzelner Querschnitte oder einfacher, isolierter Konstruktionselemente (statisch bestimmt gelagerte Balken und Druckstäbe, einfache, spezielle Rahmen). In der Ingenieurpraxis treten jedoch meist mehrfach zusammengesetzte Rahmensysteme auf, wie z.B.



der monolithische Stockwerkrahmen, dessen Trag- und Stabilitätsverhalten die vorliegende Arbeit zu erforschen versucht.

Zum Zwecke eines einfachen Stabilitätsnachweises für Rahmensysteme bedienen sich die Normen (z.B.[31],[40] ) der Hilfe eines "Ersatzstabes". Mit dem Ersatzstab wird das Problem der Systemstabilität auf das der Stabstabilität zurückgeführt. In dieser Verfahrensweise wird das tatsächliche Tragverhalten der Rahmensysteme nur angenähert, da die Bemessung für verschiedenartige Systemteile, wie Riegel und Stiele, unabhängig voneinander durchgeführt wird. In der Wirklichkeit ist die Tragkapazität beider Systemteile jedoch voneinander abhängig. Deren Bemessung ist gleichzeitig, in Verbindung miteinander durchzuführen.

Wichtig für das Tragverhalten des Gesamtsystems ist die Interaktion der Riegel und Stiele. Die miteinander abgestimmte Dimensionierung beider Systemteile würde eine optimale Ausnutzung der Tragkapazität des Gesamtsystems sowie mehr Klarheit in der vorhandenen Sicherheit bringen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zur Klärung der oben umrissenen Fragen beizutragen. Notwendig ist hierfür die Entwicklung eines wirklichkeitsnäheren, computergerechten Rechenverfahrens für die Verformungsrechnung von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton.

In der vorliegenden Arbeit wird ein solches Näherungsverfahren entwickelt und seine Genauigkeit überprüft. Mit Hilfe dieses Verfahrens werden systematische Untersuchungen über das Trag- und Verformungsverhalten von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton angestellt sowie Vorschläge für eine "direkte", gleichzeitige Bemessung der Stiele und Riegel solcher Systeme gemacht.

## 1.2 Überblick über die Rechenverfahren; Rechen-und Versuchsergebnisse der verwendeten Literatur

Stabilitätsprobleme von Stabwerken traten zuerst - bedingt durch die geschichtliche Entwicklung des Bauwesens - im Bereich des konstruktiven Stahlbaues auf, zu deren Lösung u.a. die Arbeiten [3],[13],[19],[27],[38],[47],[50],[53],[55] entscheidend beigetragen haben. Im Stahlbau sind diese Probleme heute als ausreichend geklärt anzusehen. Die genannten Arbeiten erfassen den homogenen Baustoff Stahl sowohl im rein elastischen als auch im plastischen Verformungsbereich. Eine weitere Entwicklung auf dem Gebiet der Stabilität von Stahltragwerken, bei der die Bildung plastischer Gelenke erfaßt wird und das Versagen aus dem Grenzwert der Last-Verschiebungsbeziehung einer kinematischen Kette abgeleitet wird, soll an dieser Stelle nicht näher erläutert werden, da im Stahlbetonbau die Verhältnisse anders liegen; es besteht nur bedingt eine Parallelität. In Stahlbetondruckgliedern entstehen keine definierten plastischen Gelenke, vielmehr größere plastifizierte Zonen, deren Behandlung wie beim Stahl fraglich erscheint. Hinzu kommt, daß Rahmen mit schlanken Druckgliedern auch ohne Auftreten von Plastifizierungen Stabilitätsversagen erleiden können.

Die Entwicklung in der Bautechnik und Betontechnologie, die Anwendung hochwertiger Betone und Baustähle führte auch beim Baustoff Stahlbeton zu schlankeren Konstruktionen, die stärker stabilitätsgefährdet sind. Zur Lösung der so entstandenen Stabilitätsprobleme von Stahlbetontragwerken wurden neulich rechnerisch-theoretische und experimentelle Untersuchungen in größerem Umfang aufgestellt. Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die Rechenverfahren und Versuchsergebnisse aus der Literatur - soweit es sich um die Untersuchung ganzer Systeme und nicht nur von Einzeldruckgliedern handelt - gegeben, um die vorliegende Arbeit hier einordnen zu können.

## A. Rechenverfahren

Im allgemeinen handelt es sich um Verformungsrechnungen nach Theorie II. Ordnung, die meistens unter steigender Belastung bis zu einem definierten Grenzzustand, genannt Traglastzustand, geführt werden.

Zur wirklichkeitsnäheren Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens einfeldriger Stahlbetonrahmen (mit Hilfe eines nichtlinear-elastischen Werkstoffgesetzes und der daraus abgeleiteten Momenten-Krümmungsbeziehungen) wurden die Verfahren in [6] und [11] entwickelt und ihre Richtigkeit durch Versuchsnachrechnungen (siehe Ende dieses Abschnitts) überprüft. Im wesentlichen besteht die Arbeitsweise dieser Verfahren darin, daß am verformten System in einzelnen, diskreten Rechenpunkten sowohl die Gleichgewichts- als auch die Verträglichkeitsbedingungen - unter Einschluß der nichtlinearen Verformungseigenschaften des Stahlbetons - auf iterativem Wege erfüllt werden. Die Verfahren von CHANG[11] und BREEN[6] wurden auf das spezielle Einfeldsystem abgestellt; eine Erweiterung auf größere Systeme ist nicht erfolgt.

Rechenverfahren der E-Theorie, wie das von CHWALLA[13] und LIVESLEY[35] können für beliebige Systeme angewendet werden, vorausgesetzt, daß deren wichtigste Annahme hinsichtlich der Verformungen, das Hooke'sche Gesetz, Gültigkeit hat. Dies ist bekanntlich beim Stahlbeton nicht der Fall, eine direkte Anwendung dieser Verfahren liefert keine brauchbaren Ergebnisse.

In den Rechenverfahren von BAKER[1] und LIVESLEY[36] werden elasto-plastische Spannungs-Dehnungsgesetze der Berechnung zugrundegelegt, und während einer Laststeigerung wird die Bildung plastischer Gelenke angenommen. Als Versagensursache wird das Auftreten einer kinematisch labilen Gelenkkette beim Entstehen einer ausreichenden Anzahl plastischer Gelenke definiert. Diese Verfahren

sind am besten bei Stahltragwerken anwendbar, da bei diesen eine Plastifizierung tatsächlich konzentriert auftreten kann. Dagegen können in Stahlbetondruckgliedern größere plastische Zonen auftreten, die die Gelenkannahme fraglich erscheinen lassen. Außerdem kann der Fall Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung nicht mit Hilfe der Gelenktheorie erfaßt werden.

Das Rechenverfahren von CRANSTON[15] eignet sich für wirklichkeitsnahe Verformungsrechnungen nach Theorie II. Ordnung an ganzen Rahmensystemen. Mit ähnlichen Grundlagen wie bei [6] und [11] wird die Verformungslinie des Systems über Momenten-Krümmungsbeziehungen integriert und iterativ verbessert. Mit Hilfe des Rechenverfahrens werden Einfeldrahmen unter überwiegender Biegung untersucht und eigene Versuche nachgerechnet. (Siehe [16][17]). Eine Anwendung für Stabilitätsuntersuchungen ist nicht vorgenommen worden. Die Anwendbarkeit auf mehrfach zusammengesetzte Systeme ist zwar theoretisch möglich, erfordert jedoch einen großen Aufwand an Rechenzeit und Kernspeicherplätzen. (Nach Angaben von Cranston beträgt die Rechenzeit der Traglast eines Zweigelenkrahmens 3 Stunden auf einer ICT Rechenanlage mit 8 K Worten Kernspeicherkapazität).

In Anlehnung an das Verfahren von CRANSTON[15] hat der Verfasser in[32] ein rein numerisches Rechenverfahren mit entsprechendem Rechenprogramm entwickelt, das für Versuchsnachrechnungen und Stabilitätsuntersuchungen an Zweigelenkrahmen eingesetzt wurde (siehe Ende dieses Abschnitts). Erfahrungen mit diesem Verfahren zeigen, daß die rein numerischen Methoden zwar als "streng" bezeichnet werden könnten, weil bei entsprechend enger Teilung der Rechenpunkte die Genauigkeit der Verformungsrechnung praktisch beliebig gesteigert werden kann; sie haben jedoch den erheblichen Nachteil, daß vorhandene Rechenkapazitäten schnell mit zunehmender Größe des zu

untersuchenden Systems erschöpft wurden. Der Platzmangel resultiert aus der Tatsache, daß in jedem Rechenpunkt eine Anzahl charakteristischer Größen zu bestimmen und anschließend zu speichern sind. Nach Meinung des Verfassers erscheint es sinnvoll, nach weiteren Vereinfachungen zu suchen. Versuchsnachrechnungen von CHANG[11] und PARME [44] zeigen, daß zum Teil erhebliche Vereinfachungen (z.B. konstante Stabsteifigkeiten statt veränderlicher) ohne wesentliche Einbuße der Genauigkeit möglich sind.

Im folgenden werden noch weitere Rechenverfahren, die verschiedene Näherungen anwenden, kurz diskutiert.

Das Rechenverfahren von FEY[20] schlägt statt einer strengeren Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung einen Lastfall "Schiefstellung" der Stiele des zu untersuchenden Stockwerkrahmens vor. Verträglichkeitsbedingungen werden lediglich im obersten Stockwerk erfüllt. Es wird ein Vorschlag zur generellen Abminderung der Stabsteifigkeiten angegeben:  $EI^{II}/EI^I = 0,5$ . Das Verfahren eignet sich gut für praktische Näherungsberechnungen. Es ist lediglich der Ansatz zur generellen Abminderung der Stabsteifigkeiten zu kritisieren; in Abschnitt 2.2.5 wird gezeigt, daß diese Annahme manchmal auf der unsicheren Seite liegen kann (vergl. Bild 2.10).

PARME untersucht in [44] beidseitig elastisch eingespannte Rahmenstiele. Die elastische Einspannung wird mit Hilfe der Biegesteifigkeiten anschließender Stäbe definiert. Die kritische Last des Stieles wird analytisch, unter Berücksichtigung gesondert, lastabhängig definierter, konstanter Stielsteifigkeiten bestimmt. Versuchsnachrechnungen bestätigen die Richtigkeit der vereinfachenden Annahmen. Parme weist darauf hin, daß bei größeren Schlankheiten des Stieles ( $h/d \geq 30$ ) zu konservative Ergebnisse zu erwarten sind.

BOUMA behandelt in [5] einen typischen Rahmenknoten mit anschließenden Stabteilen, die dadurch entstehen, daß man die zu erwartenden Momentennullstellen vorausschätzt

und dort Gelenke mit bekannten Normal- und Querkräften annimmt. An diesem einfachen Ersatzsystem werden aufschlußreiche Stabilitätsuntersuchungen sowohl für unbewehrte als auch für bewehrte Betontragglieder angestellt.

Die Vorzüge der Arbeiten von Parme und Bouma liegen darin, daß sie durch einen zutreffenden Ausschnitt aus dem Gesamtsystem direkte, angenäherte Traglastbestimmung unter einem vertretbaren Rechenaufwand ermöglichen.

Ein weiteres Verfahren zur Verformungsrechnung von Rahmensystemen ist das von BUBENHEIM in [9]. Es wird ein erweitertes Weggrößenverfahren nach [13] dadurch abgeleitet, daß die Momenten-Krümmungsbeziehungen durch Polygonzüge ersetzt werden. Unter Annahme linearen Momentenverlaufs entlang der Stäbe werden die Grundbeziehungen des Weggrößenverfahrens zu einer fest angenommenen Anzahl der Polygonseiten angeschrieben. Es wurden keine systematischen Traglastuntersuchungen mitgeteilt. Einige Beispiele werden angegeben.

## B. Versuchsergebnisse

Im folgenden werden Versuchsergebnisse und deren Nachrechnungen verschiedener Verfasser angegeben, um die Richtigkeit der üblichen Rechenannahmen der inelastischen Verformungsrechnungen und die erreichbare Genauigkeit zu prüfen. Es handelt sich hierbei um Kurzzeit-Rahmenversuche, deren Hauptparameter in den folgenden Tabellen gezeigt werden. Weitere Details sind in der Literaturangabe zu finden.

# Versuchsergebnisse und Nachrechnungen

Tafel 1.1

Test	Bezogene Stiel- länge h/d	Bezogene Ausmitte e/d	Versuchs- Traglast $P_V$ [Mp]	Quotient Versuch/Rechnung	
				$P_V/P_R^*$	$P_V/P_R^*$
F <sub>1</sub>	21	0,116	27,2	0,90	0,91
F <sub>2</sub>	21	0,106	27,9	0,91	0,92
F <sub>3</sub>	21	0,337	18,0	1,08	1,15
F <sub>4</sub>	21	0,222	23,8	1,02	1,11
F <sub>5</sub>	16	0,097	25,2	1,00	1,03
F <sub>6</sub>	16	0,320	20,4	1,03	1,09

\* Chang

Versuche: Rahmen mit einsinnig gekrümmten, unverschieblichen Stielen von FURLONG und FERGUSON [22]

Nachrechnungen: CHANG [11]

Tafel 1.2

Test	Bezogene Stiel- länge h/d	Bezogene Ausmitte e/d	Versuchs- Traglast $P_V$ [Mp]	Quotient Versuch/Rechnung	
				$P_V/P_R^{**}$	$P_V/P_R^*$
L <sub>1</sub>	20	0,10	17,1	0,83	0,82 0,77
L <sub>2</sub>	20	0,30	11,4	1,02	0,88 0,80
L <sub>3</sub>	20	0,10	14,1	1,01	1,01 0,95
L <sub>4</sub>	10	0,10	24,9	0,81	- -
L <sub>5</sub>	10	0,30	19,3	1,00	1,03 0,99
L <sub>7</sub>	10	0,10	18,2	0,95	0,74 0,73

\* Chang

\*\* Parme

Versuche: Rahmen mit gegenläufig gekrümmten, verschieblichen Stielen von BREEN und FERGUSON [21]

Nachrechnung: CHANG [11] und PARME [44]

Tafel 1.3

Test	Bezogene Stiel- länge h/d	Bezogene Ausmitte e/d	Versuchs- Traglast P <sub>v</sub> [Mp]	Quotient Versuch/Rechnung	
				P <sub>v</sub> /P <sub>R</sub> <sup>**</sup>	P <sub>v</sub> /P <sub>R</sub> <sup>***</sup>
F <sub>1</sub>	30		26,8	1,19	1,16
F <sub>2</sub>	30		26,8	1,00	0,96
F <sub>3</sub>	15		27,7	1,17	1,20
F <sub>4</sub>	15		37,9	1,16	1,18
<hr/>					
*	CHANG				
**	PARME				

Versuche: Rahmen mit einsinnig gekrümmten, unverschieblichen Stielen von BREEN und FERGUSON[6]

Nachrechnungen: CHANG[11]

Tafel 1.4

Test	Bezogene Stiel- länge h/d	Bezogene Ausmitte e/d	Versuchs- Traglast P <sub>v</sub> [Mp]	Quotient Versuch/Rechnung	
				P <sub>v</sub> /P <sub>R</sub> <sup>**</sup>	P <sub>v</sub> /P <sub>R</sub> <sup>***</sup>
A <sub>1</sub>	27,3	0,20	17,4	0,99	1,03
A <sub>2</sub>	27,3	0,20	18,1	1,01	1,03
B <sub>1</sub>	27,3	1,27	3,4	1,02	0,99
B <sub>2</sub>	27,3	1,27	3,3	0,96	0,96
C <sub>1</sub>	27,3	0,14	17,3	0,96	0,94
C <sub>2</sub>	27,3	0,14	19,5	0,91	0,93
D <sub>1</sub>	27,3	0,86	5,5	0,91	0,90
D <sub>2</sub>	27,3	0,86	5,5	0,93	0,97
<hr/>					
**	PARME				
***	MacGREGOR und BARTER				

Versuche: Unverschiebliche Rahmenstiele mit gegenläufiger Krümmung von MacGREGOR und BARTER [44]

Nachrechnungen: BARTER und PARME [44]



Tafel 1.5

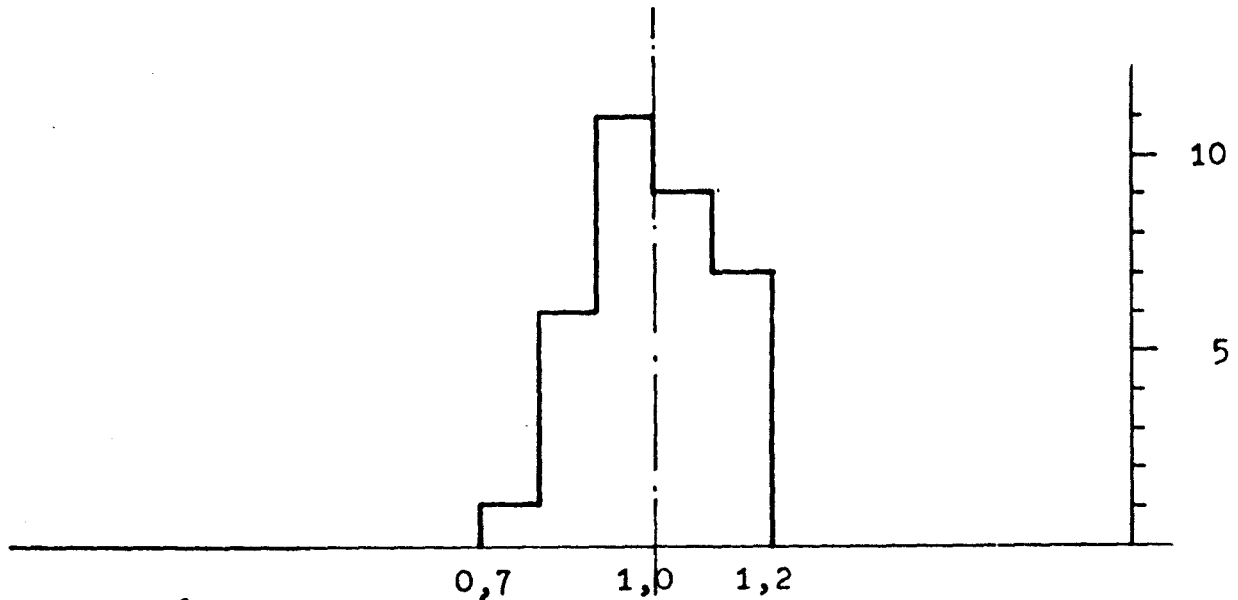
Test	Bezogene Stiel- länge h/d	Bezogene Ausmitte e/d	Versuchs- Traglast P <sub>v</sub> [Mp]	Quotient Versuch/Rechnung P <sub>v</sub> / P <sub>R</sub>
19	15	0,114	55,0	1,00
19 <sub>w</sub>	15	~ 0,114	43,8	0,78
20	20	0,152	36,0	0,83
20 <sub>w</sub>	20	~ 0,152	41,8	0,89
21	30	0,224	24,2	0,91
22	40	0,300	18,5	1,20
23	15	0,667	17,3	1,11
25	30	0,668	10,6	0,81
26	30	1,336	5,2	0,87
26 <sub>w</sub>	30	~ 1,336	6,6	1,06

Versuche: Zweigelenkrahmen unter symmetrischer, lotrechter Belastung (unverschieblich gehalten) von BOCHMANN und RÖBERT[4]

Nachrechnungen: JANKÓ [32]

Bild 1.2

Zusammenstellung der Nachrechnungsergebnisse  
verschiedener Versuche und Verfasser



Tafel 1.6

Test	Verfasser der Nachrechnung				Mittel- wert	Variations- Koeffizient %
$F_1-F_6$ [22]	Chang[11]	2	2	2	1,035	9,6
$L_1-L_7$ [21]	Parme[44]	2	1	3	0,935	10,3
$F_1-F_4$ [22]	Chang[11]	1		3	1,125	9,9
$A_1-D_2$ [44]	Mac					
	Gregor[44]	6	2		0,970	4,4
$19-26_w$ [4]	Jankó [32]	1	4	1 2 2	0,946	14,4
		1	6	11	9	7

Anzahl der Versuche: 34

Gesamtmittelwert:

1,000

### 1.3 Notwendigkeit für die Entwicklung eines Verfahrens zur näherungsweise Berechnung der Tragfähigkeit von Stahlbetonrahmen

Zur Erfüllung der im Absatz 1.1 gesetzten Ziele ist für die Lösung des Problems ein brauchbares und möglichst wirklichkeitsnäheres Rechenverfahren nötig. Die Schwierigkeiten bei Erstellung solcher Rechenmethoden - wie aus Absatz 1.2 zu ersehen ist - sind weniger prinzipieller als rechentechnischer Art. Wesentlich ist die gleichzeitige Erfüllung folgender notwendiger Bedingungen:

- a) Berücksichtigung des wirklichkeitsnäheren Verformungsverhaltens des Stahlbetons,
- b) Berücksichtigung des tatsächlichen Beanspruchungszustandes (Riegelquerlasten, Umlagerungen),
- c) Rechentechnisch rationale Formulierung des Problems, um mit vertretbarem Kernspeicher- und Rechenzeitaufwand arbeiten zu können. (Zur Durchführung der Berechnungen wird eine mittlere, noch leicht zugängliche Digitalrechenanlage mit einer Kernspeicher-Kapazität von 32 K-Worten vorausgesetzt.)

Im folgenden Abschnitt wird dieses Verfahren näher erläutert.

## 2. Verfahren zur näherungsweise Berechnung der inelastischen Grenzlast von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

---

### 2.1 Voraussetzungen

Das folgende Rechenverfahren ist ein Mittel zur Traglastapproximation ebener Stockwerkrahmen aus Stahlbeton.

Es handelt sich um eine Näherung, weil

- einerseits nicht die Traglast im Sinne der Kollapslast, sondern eine von dieser mehr oder weniger abweichende, im folgenden als inelastische Grenzlast bezeichnete, kritische Last bestimmt wird;
- andererseits auch zur Berechnung der inelastischen Grenzlast gewisse, noch zu erläuternde Näherungen herangezogen werden.

Mit Hilfe des Rechenverfahrens kann eine inelastische Verformungsrechnung durchgeführt werden (Theorie II. Ordnung mit nichtlinear-elastischem Werkstoffgesetz), soweit es sich um eine definierte System-Lastanordnung handelt. Geht das System während der Berechnung infolge krasser, örtlicher Änderung der Biegesteifigkeiten (Bildung "plastischer Zonen") in ein anderes System über, so kann das Verfahren in unveränderter Form nicht mehr angewendet werden. Die Tragkapazität eines Systems oberhalb der Bildung einer ersten "plastischen Zone" wird im Rahmen dieser Arbeit daher nicht untersucht.

Unter bestimmten Bedingungen kann die Näherung in Form der inelastischen Grenzlast in eine strengere Lösung der Traglast übergehen (vergl. Abschnitt 2.2.5).

#### 2.1.1 Definition der inelastischen Grenzlast

Die inelastische Grenzlast ist eine dem Grenzwert der Last-Verformungsbeziehung eines Systems zugehörige Last (vgl. Bild 1.1). Der Grenzwert der Last-Verformungsbeziehung wird durch zwei Bedingungen definiert:

- 1) Erreichen einer Grenztragfähigkeit in einem beliebigen Systemquerschnitt

$$\epsilon_i \geq \epsilon_u$$

(Die Randdehnung des Querschnitts erreicht die definierte Grenzdehnung des Baustoffs Beton oder Stahl).

- 2) Erreichen der Stabilitätsgrenze des Systems

$$dP/dy \rightarrow 0$$

(Der Zuwachs der äußeren Beanspruchungen infolge geringer Laststeigerung übersteigt den des inneren Widerstandes).

### 2.1.2 Einschränkungen der Anwendbarkeit des Rechenverfahrens

Das vorliegende Rechenverfahren nutzt gewisse Vereinfachungsmöglichkeiten zur Lösung des Verformungsproblems aus. Dies bedeutet einige Einschränkungen der direkten Anwendbarkeit des Rechenverfahrens. Nachstehend sind diese einschränkende Voraussetzungen zusammengestellt:

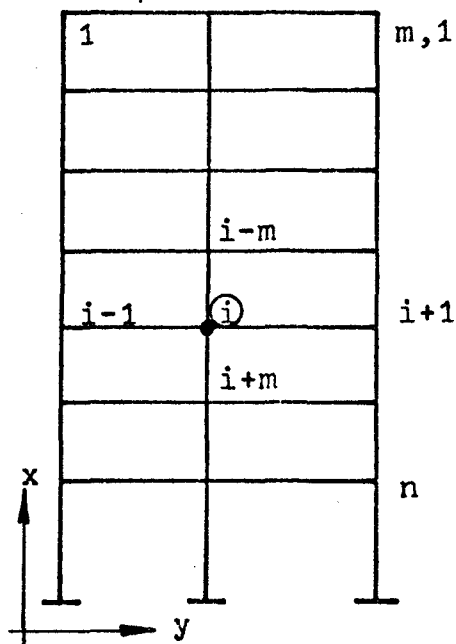
- 1) Einschränkungen hinsichtlich der Systemgeometrie
  - a) Ein Rahmenknoten enthält nicht mehr als vier rechtwinklig aneinander angeschlossene prismatische Stäbe.
  - b) Der prismatische Charakter der Stäbe wird auch innerhalb des Überschneidungsbereiches der Stäbe am Knoten vorausgesetzt. (Es wird keine sprunghafte Vergrößerung der Steifigkeiten der Stäbe innerhalb des Knotens angesetzt).
- 2) Einschränkungen hinsichtlich der Lastanordnung
  - a) Querbelastrung der Rahmenstiele ist nicht erlaubt
  - b) Die axiale Beanspruchung der Rahmenriegel und deren Einfluß auf die Verformungsrechnung wird vernachlässigt.
  - c) Die Querbelastrung der Rahmenriegel wird als stetig verteilt vorausgesetzt. (In den Berechnungen wurde mit einer konstanten Streckenlast für die Riegel gerechnet).
- 3) Einschränkungen hinsichtlich der Querschnittsform und Bewehrungsanordnung
  - a) Es werden symmetrische und symmetrisch bewehrte Querschnitte vorausgesetzt. (Über die Möglichkeit der Verallgemeinerung siehe Abschnitt 2.2.5).
- 4) Voraussetzungen für die Verformungsrechnung:
  - a) Achsenlängsdehnungen bzw. -stauchungen und Schubverformungen werden nicht berücksichtigt.

- b) Es wird mit stabweise konstanten, jedoch beanspruchungs-und bewehrungsabhängigen Biegesteifigkeiten gerechnet. Diese Annahme liefert nur für symmetrische oder antimetrische Momentenverteilung entlang der Stäbe eine strenge Lösung der Verformungsrechnung (siehe Abschnitt 2.2.5). In den übrigen Beanspruchungsfällen gilt sie als Näherung.
- c) Die parallel zu den Rahmenstielachsen auftretenden Verschiebungskomponente der Knoten werden (entsprechend der Voraussetzung 4a) zu Null gesetzt. Systeme, bei denen diese Voraussetzung nicht bei jedem Knoten erfüllbar ist (z.B. "Vierendeel-Träger") werden aus den folgenden Untersuchungen ausgeschlossen.

## 2.2 Rechengrundlagen

### 2.2.1 System und Bezeichnungen

Untersucht wird ein allgemeines, ebenes Stabsystem mit biegesteifen Knoten und rechtwinkligen Stabanschlüssen an den Knoten (siehe Bild 2.1).



Indizes:

$m$  = Anzahl der Stützenstränge

$n$  = Anzahl der Geschoßriegel

$i$  = Knotenindex

Bild 2.1 System und Bezeichnungen

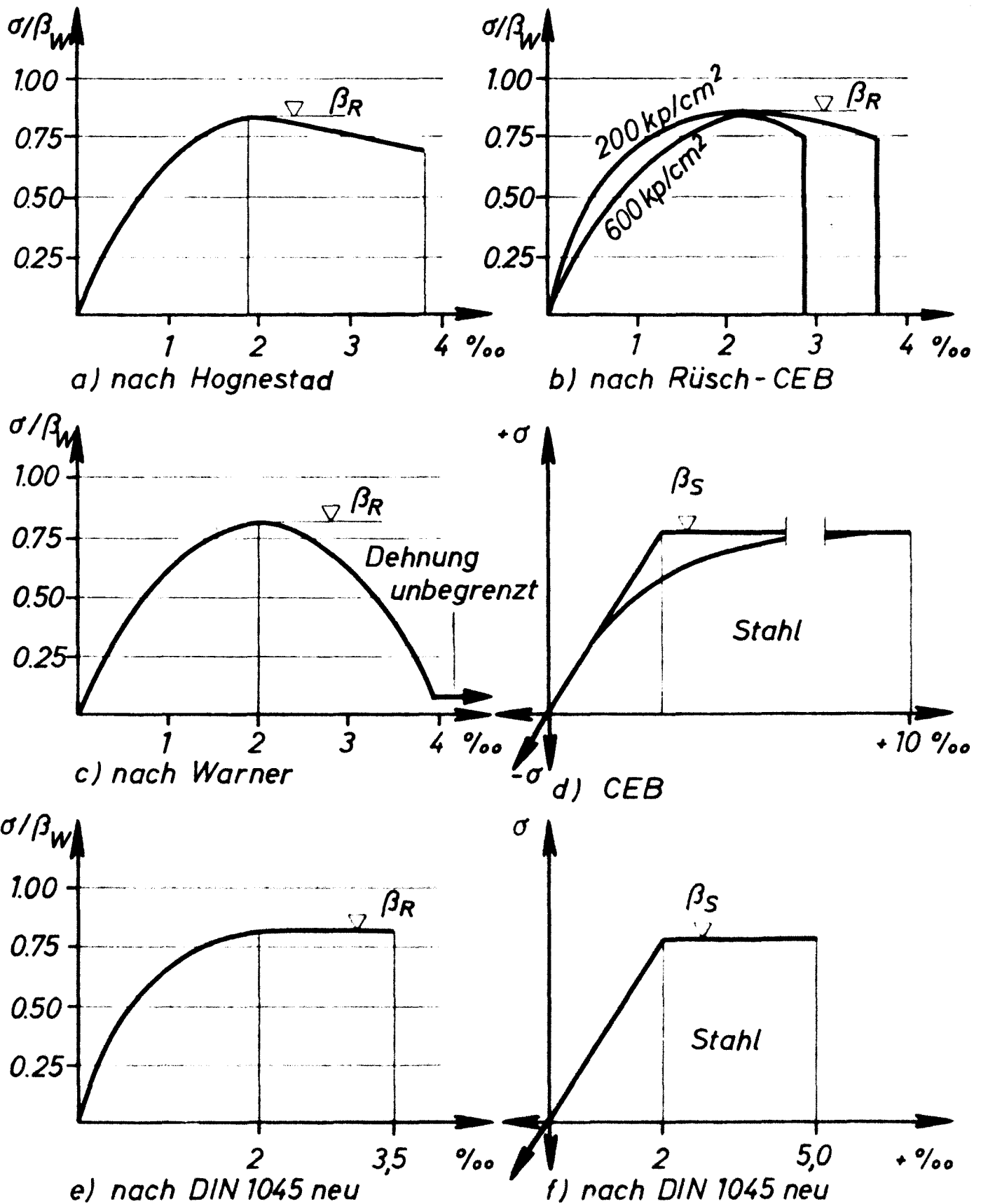
### 2.2.2 Rechenannahmen

Es werden zur Durchführung der wirklichkeitsnäheren Verformungsrechnung - unter Berücksichtigung der Voraussetzungen nach Abschnitt 2.1.2 - noch folgende Rechenannahmen zugrunde gelegt:

- a) Die Kurzzeittraglasten werden bestimmt. Zeitabhängige Vorgänge, wie Kriechen und Schwinden, werden nicht behandelt.
- b) Es werden inelastische Werkstoffgesetze für Stahl und Beton (Arbeitslinien) angewendet (siehe Bild 2.2)
- c) Die Bernoulli-Hypothese des Ebenbleibens der Querschnitte wird als gültig vorausgesetzt.
- d) Die Mitwirkung des Betons auf Zug wird vernachlässigt.
- e) Der Einfluß der zwischen den Rissen liegenden Betonzugzone auf das Verformungsverhalten des Stahlbetons wird vernachlässigt (siehe [49]).
- f) Die Krümmungen werden in diskreten Punkten der einzelnen Stäbe streng bestimmt und mit deren Hilfe eine "wirksame Stabsteifigkeit" definiert.
- g) Die konstanten, "wirksamen Stabsteifigkeiten" werden in die analytischen Lösungen der Elastizitätstheorie eingesetzt, um die schrittweise Linearisierung des Problems herbeizuführen.

Im folgenden werden die Annahmen - soweit es nötig erscheint - näher erläutert.

In Punkt b) sind die Arbeitslinien für Beton und Stahl erwähnt. Das Verformungsverhalten der Baustähle St 22.34, St.42.50, St 50.55 läßt sich mit ausreichender Genauigkeit durch eine bilineare elastoplastische Arbeitslinie beschreiben. Diese Annahme wird in der Fachliteratur mit Erfolg verwendet, die damit verbundenen Fehler sind gering, wie es in [30] zahlenmäßig belegt worden ist (siehe Bild 2.2).



(In der vorliegenden Arbeit wurden e) und f) verwendet)

**Bild 2.2**  $\sigma/\epsilon$ -Linien der Baustoffe Beton und Stahl



Anders ist es mit der Betonarbeitslinie, deren Form, Völligkeit, Scheitelwert und Grenzdehnung bei verschiedenen Verfassern relativ große Abweichungen aufweisen (siehe [26],[41], [51] usw. Bild 2.2). Die Aufstellung der Betonarbeitslinien beruht auf Versuchen an isolierten Probekörpern, deren Übertragbarkeit auf hochgradig statisch unbestimmte Systeme keineswegs erwiesen ist. Die mit Hilfe solcher Grundlagen errechneten Verformungen können nicht als "exakt" gelten und werden daher als Näherung für die vorliegende Arbeit angesetzt. Um die Richtigkeit der angenommenen Arbeitslinien zu überprüfen, können Versuchsnachrechnungen herangezogen werden. Die in dieser Arbeit verwendeten Arbeitslinien entsprechen denen nach [32] bzw. [41] und wurden durch Versuchsnachrechnungen entsprechend belegt. Die meisten der von verschiedenen Verfassern vorgeschlagenen Arbeitslinien für Beton ähneln sich insofern, als sie eine definierte Form, einen Scheitelwert und eine Grenz -(Bruch)-Dehnung besitzen. Neuartig und sehr bemerkenswert dagegen ist der Vorschlag von WARNER (siehe [33] und Bild 2.2. Hierbei werden keine Grenzdehnungen festgelegt. Sie ergeben sich aus dem Grenzwert (oder Maximalwert) der Last-Verformungsbeziehung (vergl. Bild 1.1 Punkt c). Setzt man nämlich der Plastifizierung durch Grenzdehnungen keine Grenzen, so lassen sich sowohl für Materialbruch als auch für Stabilitätsversagen ähnliche Last-Verschiebungscharakteristika ableiten, und das Versagen kann eindeutig mit dem Kriterium  $dP/dy \rightarrow 0$  definiert werden. Große gemessene Stauchungen und Dehnungen an statisch unbestimmt gelagerten Versuchskörpern lassen die Annahme berechtigt erscheinen. Erste Versuchsnachrechnungen für Stahlbetonstützen unter Kurzzeit- und Langzeitbelastung bestätigten die Richtigkeit dieser Rechenannahme [33].

### 2.2.3 Ein effektives, strenges Verfahren zur Bestimmung der Momenten-Krümmungsbeziehungen

Die Verformungswilligkeit eines jeden Stahlbetonquerschnitts des zu untersuchenden Systems ist beanspruchungsabhängig und läßt sich durch die Funktion

$$K = f(N, M) \quad (2.1)$$

charakterisieren. Die Krümmungsfunktion  $K$  ist im allgemeinen nicht linear. Sie läßt sich mit Hilfe numerisch iterativen Prozeduren mit ausreichender Genauigkeit wie folgt errechnen: (siehe [23] und [32])

Gesucht wird für den vorgegebenen  $N, M$ -Beanspruchungszustand des Querschnitts die Querschnittskrümmung

$$K = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h} \quad (2.2)$$

Die zwei unbekannten Randdehnungen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  lassen sich aus den simultanen Funktionen

$$N = f_1(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (2.3)$$

$$M = f_2(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (2.4)$$

mit Hilfe ihres totalen Differentials wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_1} \Delta \epsilon_1 + \frac{\partial N}{\partial \epsilon_2} \Delta \epsilon_2 = \Delta N \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon_1} \Delta \epsilon_1 + \frac{\partial M}{\partial \epsilon_2} \Delta \epsilon_2 = \Delta M \quad (2.6)$$

wobei nach Iteration

$$\Delta N = N_i - N_a + 0$$

$$\Delta M = M_i - M_a + 0$$

gleichzeitig zu Null werden sollen. Hierbei sind die  $N_i, M_i$  aus den  $\epsilon_1, \epsilon_2$  vorgeschätzten Randdehnungen aus den bekannten  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehungen der Baustoffe mittels Integration der Spannungen bestimmt (vgl. [29], [54] usw).  $N_a, M_a$  sind die vorgegebenen äußeren Beanspruchungen.

Die verbesserten Randdehnungen werden zu

$$\epsilon_1^{j+1} = \epsilon_1^j + \Delta\epsilon_1 \quad (2.7)$$

$$\epsilon_2^{j+1} = \epsilon_2^j + \Delta\epsilon_2 \quad (2.8)$$

in dem  $j+1$ -ten Iterationsschritt. Die Prozedur konvergiert in den meisten Fällen nach  $j = 4-5$ .

Zur praktischen Durchführung der Berechnung braucht lediglich das entsprechende Krümmungsunterprogramm im Computer aufgerufen zu werden, das dem Beanspruchungszustand entsprechende Randdehnungen und Krümmungen zuordnet.

#### 2.2.4 Einführung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" für prismatische, symmetrisch bewehrte Stahlbetonstäbe mit Rechteckquerschnitt.

Zum Zwecke der Vereinfachung der inelastischen Verformungsrechnung werden konstante, dem Beanspruchungs-Verformungszustand schrittweise angepaßte Stabsteifigkeiten eingeführt. Es handelt sich dabei um eine Näherung, die unter Berücksichtigung der in Abschnitt 2.1.2 geschilderten Einschränkungen berechtigt erscheint und zu den Zielen dieser Arbeit brauchbare Ergebnisse liefert.

Unter "wirksamer Stabsteifigkeit" wird verstanden, daß sowohl dem Werkstoffverhalten des Stahlbetons (Rißbildung, nichtlineare Arbeitslinien) als auch dem Beanspruchungszustand nach Theorie II. Ordnung Rechnung getragen wird. Die Definition der Stabsteifigkeit wird aus der Bedingung gleicher Stabendverdrehungen abgeleitet (Bild 2.3) :

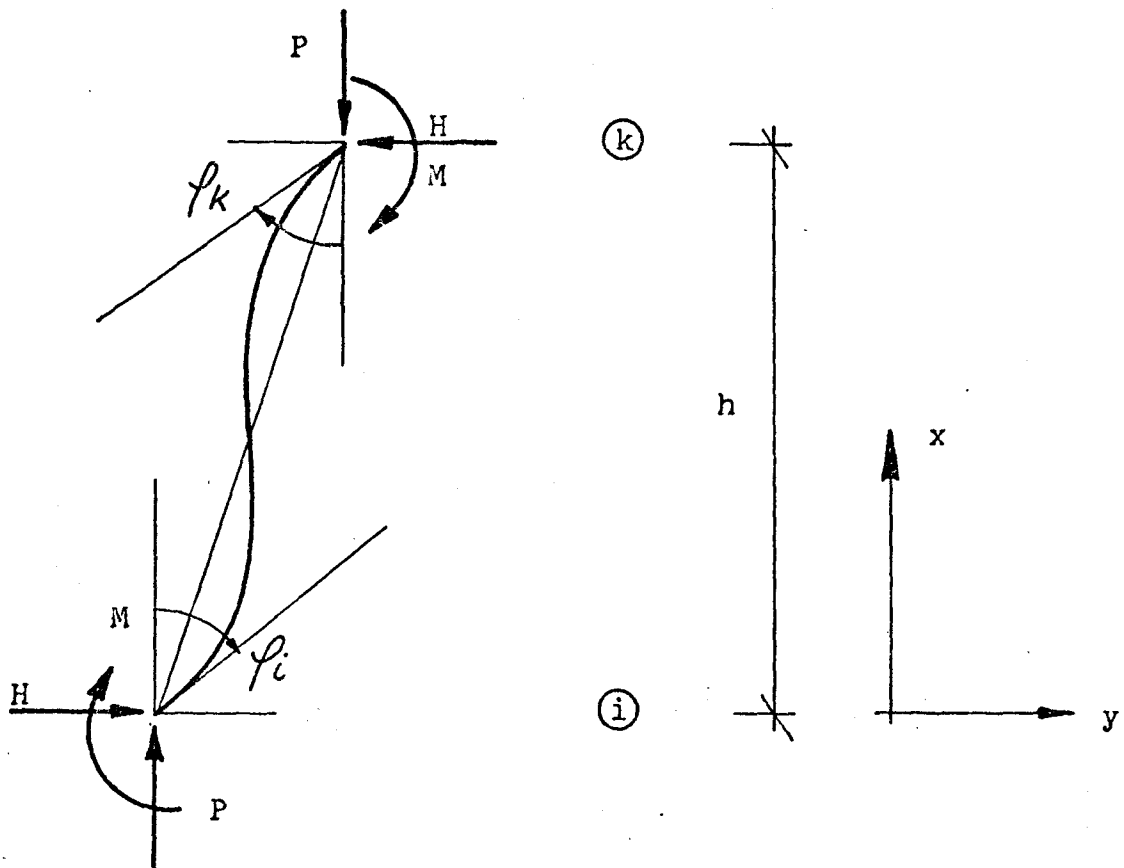


Bild 2.3 "Wirksame Stabsteifigkeit"

$$\varphi_k = \varphi_i + \int_0^l K(x) dx \quad (2.9)$$

andererseits

$$K(x) = M(x) / (EI)_w \quad (2.10)$$

hieraus

$$(EI)_w = \int_0^l M(x) dx / \int_0^l K(x) dx \quad (2.11)$$

Die "wirksame Stabsteifigkeit"  $(EI)_w$  errechnet sich also als Quotient zweier Flächen, der Momentenfläche am verformten System und der zugehörigen Krümmungsfläche. Die Integrale können numerisch (z.B. nach der Simpson'schen Regel) ausgewertet werden.

Die oben definierten Stabsteifigkeiten gelten für Rahmensysteme - unter Beachtung von Abschnitt 2.1.2 und 2.2.5 - als gute Näherungswerte, da Stabend- und Knotenverdrehungen am wirklichen und am Ersatzsystem konstanter Stabsteifigkeiten gleich gewählt wurden. (Vergl. Gl.(2.9)).

Ergänzend sei noch auf eine weitere Möglichkeit der Bestimmung der Stabsteifigkeiten hingewiesen:

Stabsteifigkeiten für Stiele verschieblicher Rahmensysteme können aus zwei verschiedenen Bedingungen

- 1) aus gleichen Stabendverdrehungen
- 2) aus gleichen Stabendverschiebungen

abgeleitet werden. Beide Bedingungen können in der Regel nicht gleichzeitig erfüllt werden, sondern nur dann, wenn die Symmetrie-Antimetrie-Bedingung nach Abschnitt 2.2.5 erfüllt ist. Aus der ersten Bedingung erhält man die Gl.(2.11), aus der zweiten die Gl.(2.13). Die relative Verschiebung der Stabenden i und k ist

$$y_k = \varphi_i \cdot l + \int_0^l \int_0^x K(x) dx dx \quad (2.12)$$

Nach Einsetzen der Gl.(2.10) in die Gl.(2.12) erhält man

$$(EI)_w = \frac{\int_0^l \int_0^x M(x) dx dx}{y_k - \varphi_i \cdot l} \quad (2.13)$$

Die Abweichungen zwischen den Werten beider Definitionen sind in der Regel nicht groß. Da es sich um Näherungsuntersuchungen handelt, wird im allgemeinen die Gl. (2.11) weiter angewendet.

### 2.2.5 Untersuchungen über die Gültigkeit der Annahme konstanter, "wirksamer Stabsteifigkeiten"

Die Einführung konstanter Ersatzstabsteifigkeiten führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Verformungsrechnung von Stabsystemen aus Stahlbeton.

Es ist notwendig, solche Vereinfachungen zu treffen, um die praktische Anwendbarkeit des Rechenverfahrens zu sichern. Es wird angestrebt, den Rechenaufwand der Verformungsrechnung eines Stabsystems aus Stahlbeton nicht wesentlich den eines Systems aus Hooke'schem Idealbaustoff übersteigen zu lassen. Berechtigt ist eine solche Vereinfachung auch deshalb, weil das wirklichkeitstreue Verformungsverhalten des Stahlbetons nur unvollständig erfaßt werden kann. Streuungen der Baustoffparameter, Unvollkommenheit der vereinfachten Arbeitslinien, das noch wenig geklärte Mitwirken des Betons auf Biegezug zwischen den aufgetretenen Rissen (siehe [49]), die teilweise Ungültigkeit der Bernoulli-Hypothese usw. setzen der erreichbaren Übereinstimmung zwischen Berechnung und Versuch Grenzen (siehe z.B. auch Abs.1.2 -Nachrechnungen von Versuchen). Es erscheint deshalb sinnvoll, die Rechnung mittels weniger streuender, integrierter Größen, der "wirksamen Stabsteifigkeiten", durchzuführen.

Der Fehler infolge der Vereinfachung entsteht dadurch, daß entlang der Stäbe zur asymmetrischen Schnittkraftverteilung asymmetrische Verteilung der Biegesteifigkeiten gehört, die in der folgenden Verformungsrechnung nicht berücksichtigt werden kann. So kann die Berechnung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" möglicherweise zu mehreren Lastanordnungen gleiche Steifigkeiten liefern.

Zur Abschätzung der Größe der begangenen Fehler werden die entlang der Stablänge veränderlichen Biegesteifigkeiten variierter Beanspruchungszustände wie folgt untersucht:

- 1) Ein Stabquerschnitt befindet sich im Erschöpfungszustand, definiert durch die Grenzdehnungen

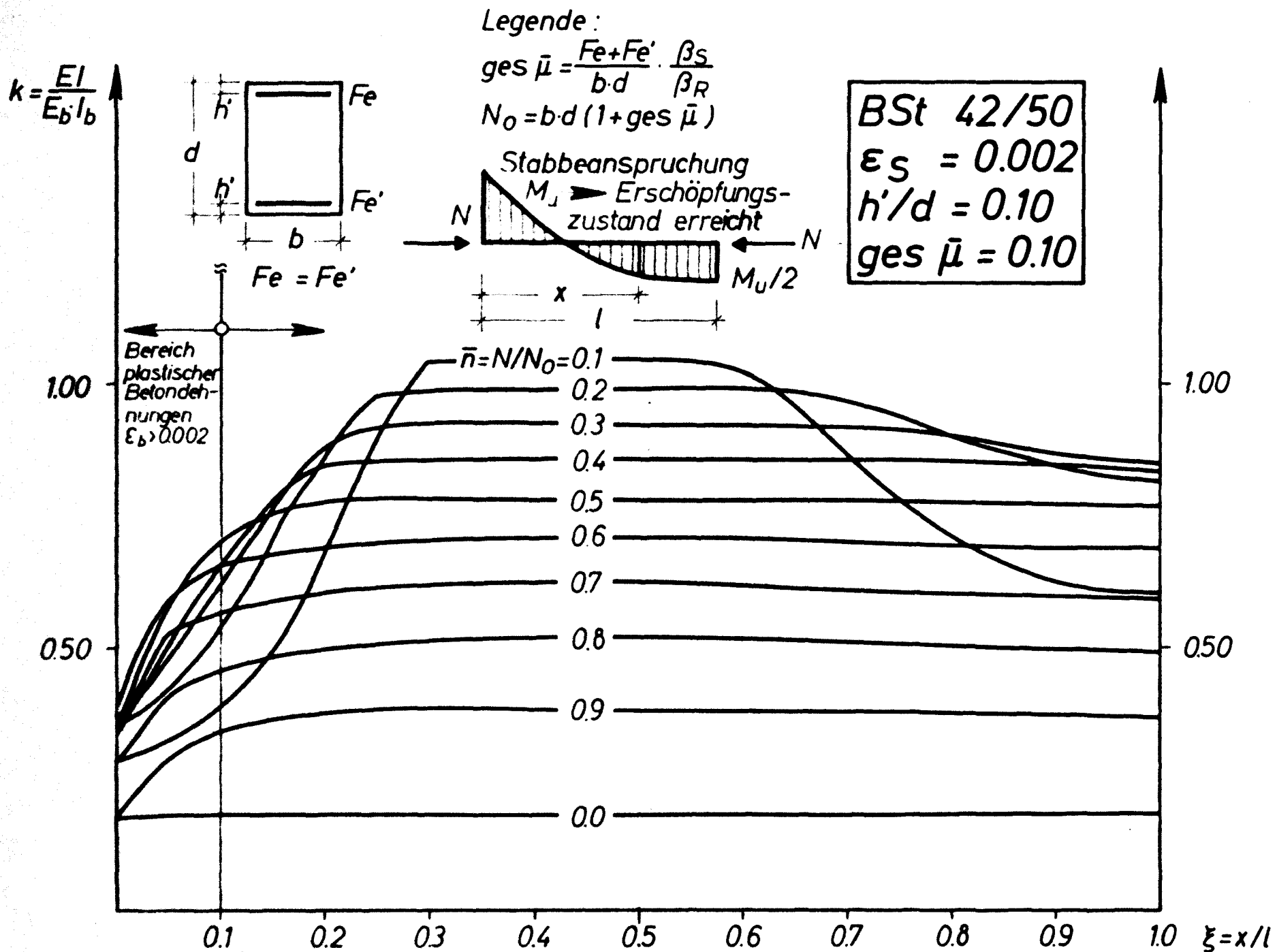
$$\epsilon_b = - 0,0035 \quad (\text{Druckversagen})$$

$$\epsilon_s = 0,0020 \text{ bzw. } 0,0050 \quad (\text{Zugversagen})$$

- 2) Normalkraft ist konstant, Moment ist veränderlich entlang der Stablänge.
- 3) Die übrigen Voraussetzungen nach Abschnitt 2.1.2 und die Rechenannahmen nach Abschnitt 2.2.2 gelten unverändert.
- 4) Die örtliche Steifigkeit wird durch die Gleichung  $EI_i = M_i/K_i$  bestimmt.
- 5) Die "wirksamen Stabsteifigkeiten" werden durch die Gl.(2.11) errechnet.

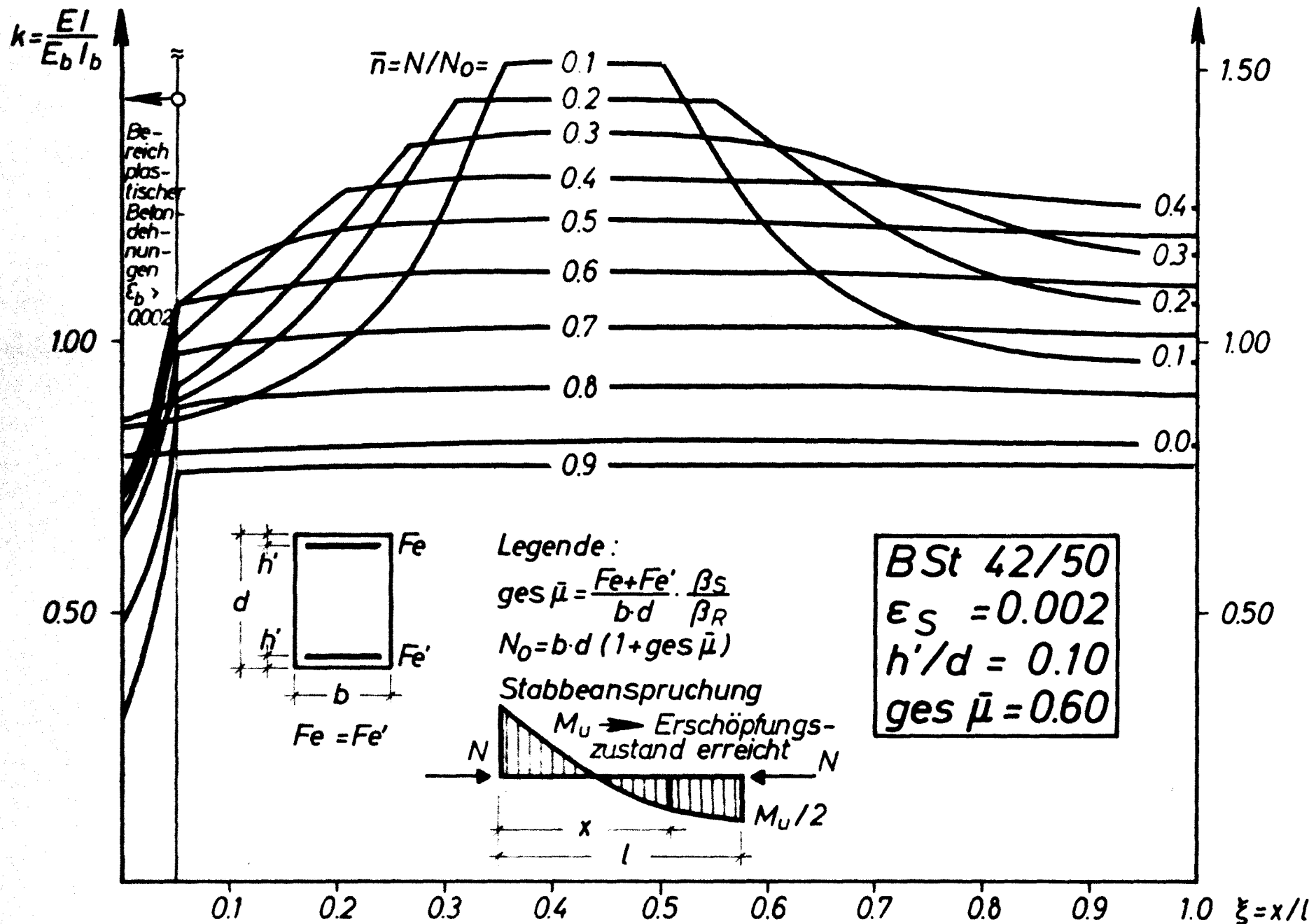
Zur Definition des Erschöpfungszustandes nach Punkt 1 ist zu bemerken, daß die Ausnutzbarkeit der Stahlzugdehnungen bei Druckgliedern auf die Fließdehnung beschränkt ist, wie von QUASt in [48] festgestellt wurde. Oberhalb dieser Dehngrenze kann die Querschnittskapazität infolge eines auftretenden Stabilitätsversagens ohne Gleichgewichtsverzweigung nämlich nur noch geringfügig gesteigert werden. Dagegen können die Stahlzugdehnungen in den Biegegliedern höher (z.B.  $\epsilon_s = 0,005$ ) ausgenutzt werden. Es sei jedoch erwähnt, daß die höhere Ausnutzung der Stahlzugdehnungen nur eine geringere Steigerung ( $\sim 2\%$ , siehe Bild 2.8) der Tragfähigkeit bewirkt.

In den Bildern 2.4, 2.5, 2.6 und 2.7 werden Ergebnisse der beschriebenen Steifigkeitsuntersuchungen dargestellt. Variiert wurden dabei der mechanische Bewehrungsgrad ( $g_{es\bar{u}}$ ), der axiale Beanspruchungsgrad ( $v$ ) und der Verlauf der Momentenfläche entlang des Stabes. Folgende Erkenntnisse können den Bildern entnommen werden:



**Bild 2.4 Querschnitts - Biegesteifigkeiten prismatischer Stahlbetonstäbe**





**Bild 2.5 Querschnitts-Biegesteifigkeiten prismatischer Stahlbetonstäbe**

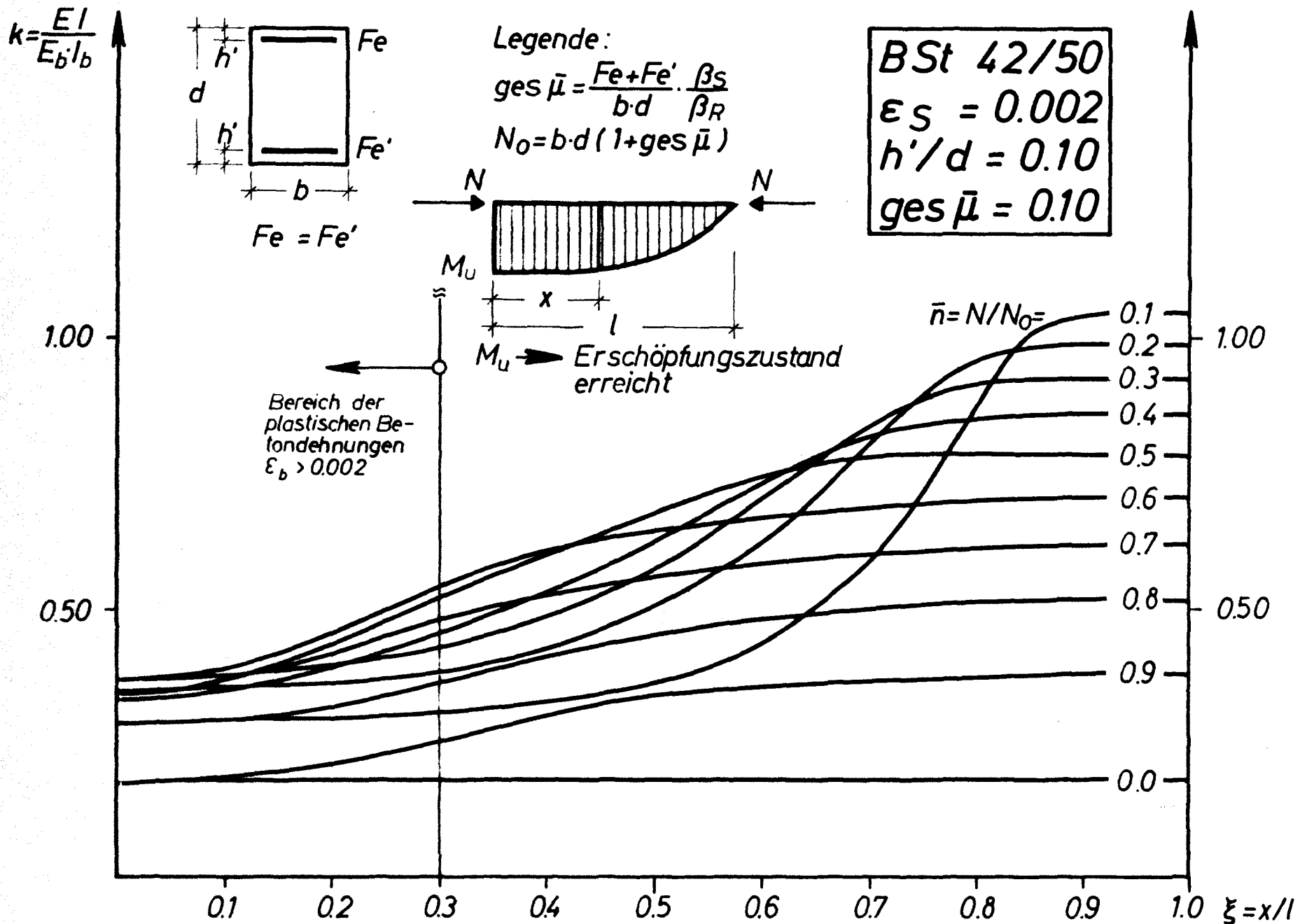
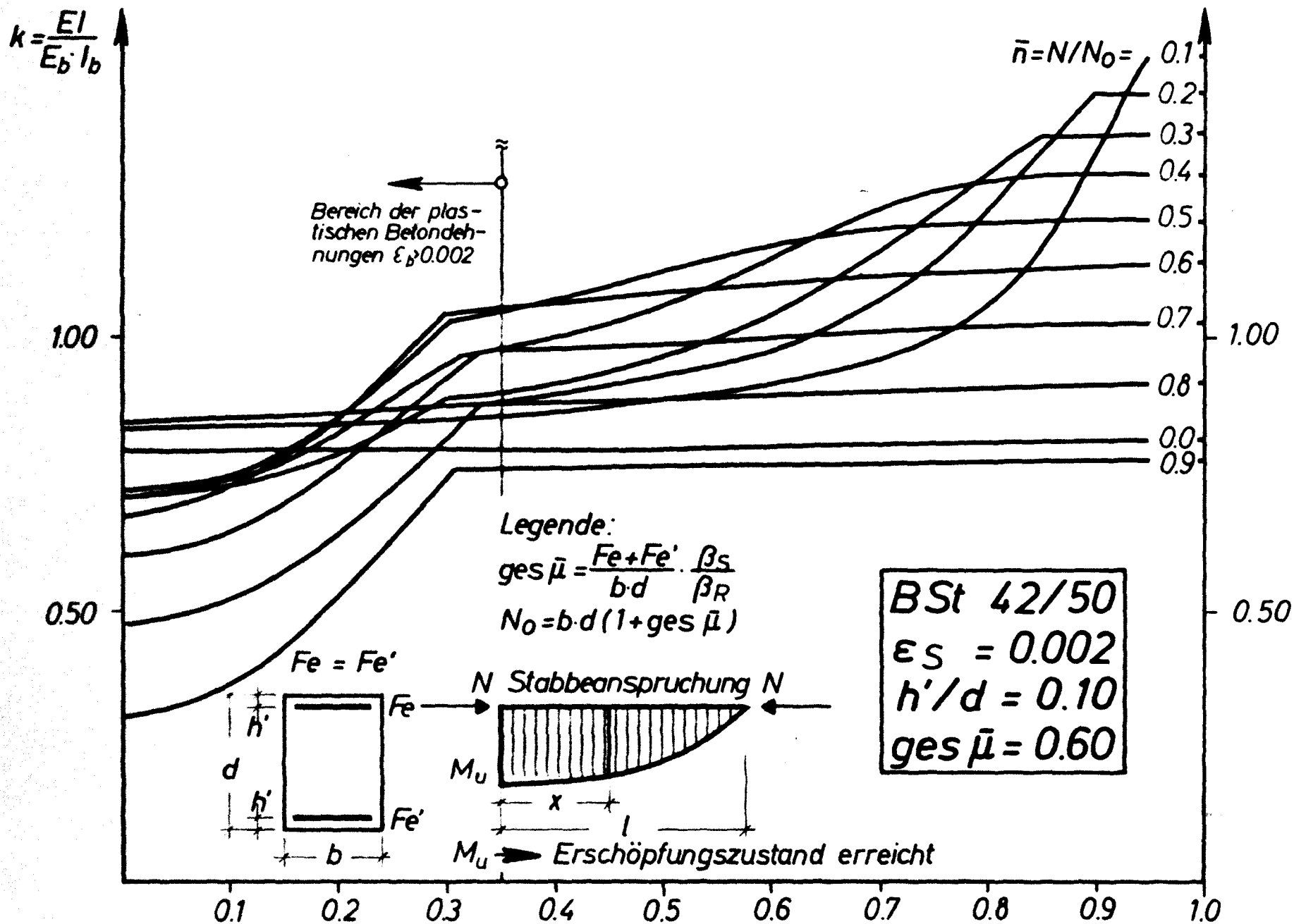


Bild 2.6 Querschnitts-Biegesteifigkeiten prismatischer Stahlbetonstäbe



**Bild 2.7 Querschnitts-Biegesteifigkeiten prismatischer Stahlbetonstäbe**

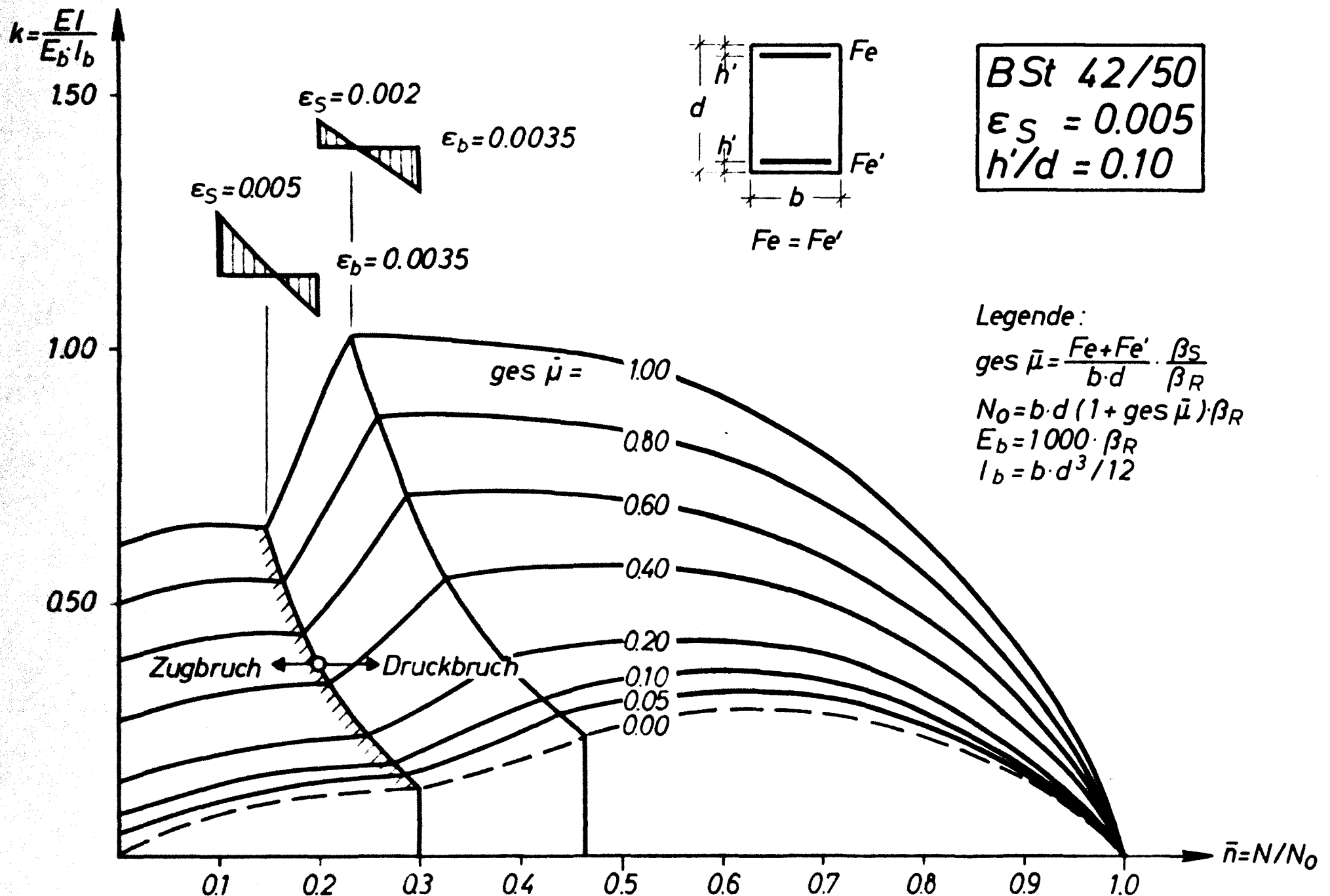
- 1) Stäbe mit geringer axialer Beanspruchung (Rahmenriegel,  $\nu \sim 0,0$ ) besitzen bis zum Erreichen der Fließgrenze der Zugbewehrung eine nahezu konstante Biegesteifigkeit.
- 2) Stäbe mit hoher axialer Beanspruchung (Rahmenstiele im Druckbruchbereich,  $\nu \gtrsim 0,4$ ) haben auch in großen Bereichen einen annähernd konstanten Verlauf der Biegesteifigkeiten; es tritt lediglich in unmittelbarer Nähe des Versagensquerschnitts ein deutlicher Abfall der Steifigkeit infolge plastifizierender Betonstauchungen ein.
- 3) Stäbe mittlerer axialer Beanspruchung (Rahmenstiele im Zugbruchbereich,  $\nu \lesssim 0,4$ ) haben einen entlang der Stablänge veränderlichen Verlauf der Biegesteifigkeiten.
- 4) Zunehmender Bewehrungsgrad bewirkt eine gleichmäßigere Verteilung der Biegesteifigkeiten.
- 5) Symmetrische, antimetrische und konstante Momentenflächen entlang der Stäbe verursachen eine symmetrische Verteilung der örtlichen Biegesteifigkeiten.

Welche Konsequenzen haben die obigen Feststellungen für die Stabilitätsuntersuchungen von Stahlbetonstockwerkrahmen?

- a) Die Annahme konstanter Ersatzstabsteifigkeiten für Rahmenriegel ist bis zum Erreichen der Fließgrenze der Zugbewehrung eine gute Näherung. Eine weitere Ausnutzung symmetrisch bewehrter Riegel bringt nur eine unwesentliche Steigerung der Biegetragfähigkeit (vergl. Bild 2.8 - Steigerung zwischen  $\epsilon_s = 0,002$  und  $\epsilon_s = 0,005$  beträgt nur  $\sim 2\%$ ). Da die Ausnutzung höherer Stahlzugdehnungen mit einem rapiden Abfall örtlicher Biegesteifigkeiten (vergl. Bild 2.9) - Bildung plastischer Zonen - verbunden ist, die die aussteifende Wirkung der Riegel vermindert, erscheint es hinsichtlich der Stabilität von Rahmensystemen

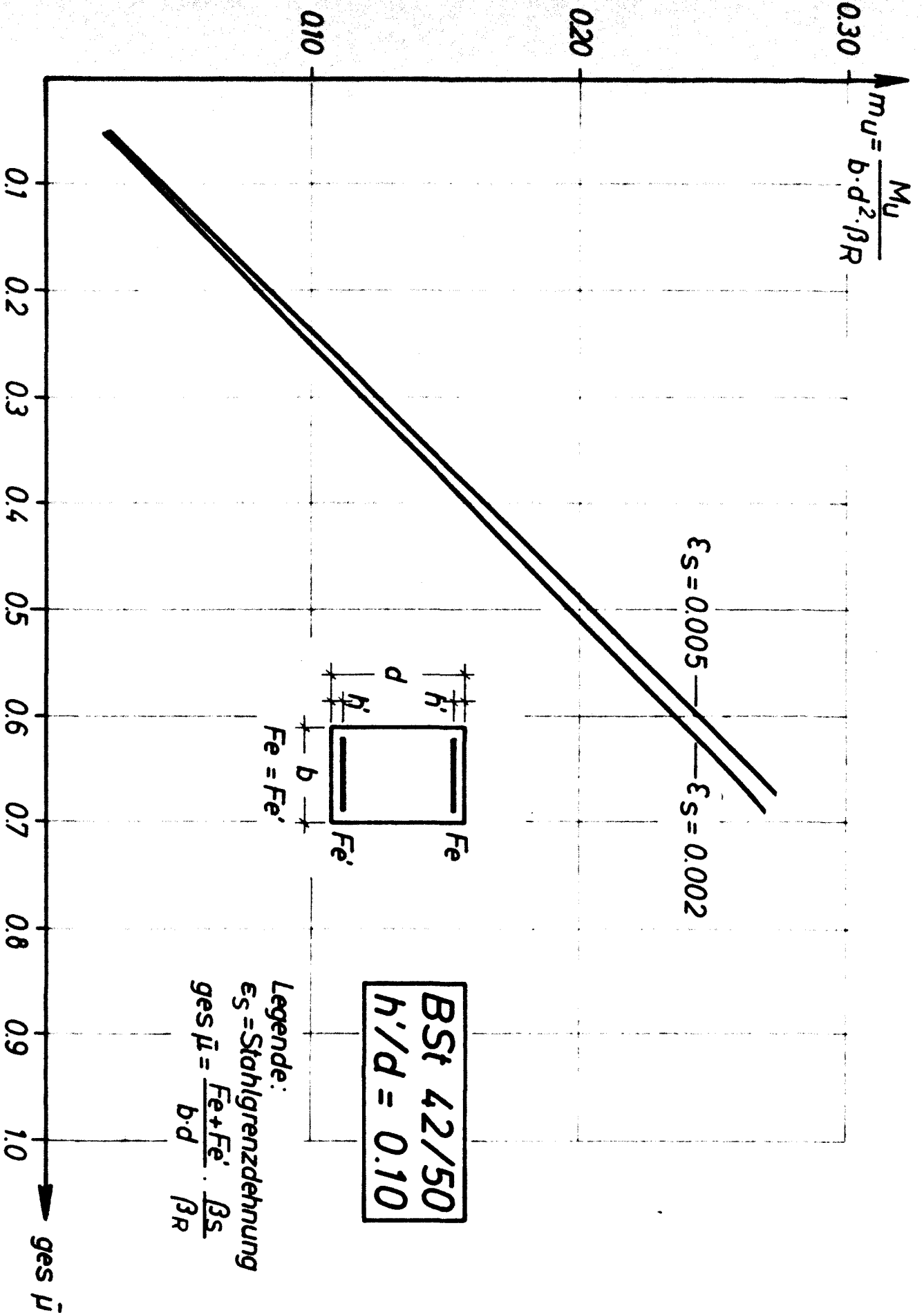
oft nicht zweckmäßig, dies zu tun. Nutzt man sie dennoch aus, so wird primär Riegelversagen die Grenzlast bestimmen. In diesem Fall ist die konstante Biegesteifigkeit eine weniger gute Annahme. Es sei jedoch betont, daß zwischen den errechneten inelastischen Grenzlasten mit  $\epsilon_s = 0,002$  bzw.  $\epsilon_s = 0,005$  keine wesentlichen Abweichungen auftreten können entsprechend der nur geringfügig erhöhten Tragkapazität der Querschnitte.

- b) Ist die den Stab beanspruchende Momentenfläche symmetrisch oder antimetrisch, so sind die veränderlichen örtlichen Biegesteifigkeiten symmetrisch verteilt, folglich sind die Stabendverdrehungen und Stabendverschiebungen des wirklichen und des stellvertretenden Stabes identisch. Der Fehler in den Verformungskomponenten der Systemknoten ist dann Null.
- c) Werden die Druckstäbe eines Systems axial hoch beansprucht ( $\nu \gtrsim 0,4$ ), oder erleidet es Stabilitätsversagen, so gelten die "wirksamen Stabsteifigkeiten" ebenso als gute Näherungswerte. Im Falle eines Stabilitätsversagens bleiben nämlich sämtliche Systemquerschnitt unausgeschöpft, und folglich tritt kein großer örtlicher Abfall der Steifigkeiten infolge plastifizierender Stauchungen des Betons, wie in den Bildern 2.4, 2.5, 2.6 und 2.7 dargestellt, auf.
- d) Druckstäbe geringer axialer Beanspruchung ( $\nu \lesssim 0,4$ ) besitzen mit dem Momentenverlauf variierende örtliche Biegesteifigkeiten. Das Maß der Steifigkeitsänderungen ist dann besonders groß, wenn die Momentenfläche auch eine Nullstelle besitzt. In diesem Falle herrscht im überdrückten Bereich der Momenten-Nullstellen Zustand I mit ungerissenen Stabquerschnitten, wohingegen in den übrigen Stabbereichen der wesentlich biegeweichere Zustand II mit gerissenen Stabquerschnitten vorhanden ist. Die Verformungsrechnung mittels "wirksamer Stabsteifigkeiten" liefert in solchen Fällen nur dann genaue Werte,



**Bild 2.9 Biegesteifigkeit eines symmetrisch bewehrten Rechteckquerschnitts im Erschöpfungszustand**

**Bild 2.8 Momentenkapazität symmetrisch bewehrter Rechteckquerschnitte**



wenn die Symmetrie-Antimetrie-Bedingungen nach Punkt b erfüllt sind.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zwar die Einführung "wirksamer Stabsteifigkeiten" asymmetrischen Beanspruchungszuständen der Druckstäbe nicht in vollem Umfang Rechnung trägt, daß das grundsätzliche Verformungsverhalten der Stäbe und das Tragverhalten des Systems sich dennoch im Rahmen der hier gesuchten Näherung in ausreichendem Maße erfassen läßt. Denn bei Errechnen der "wirksamen Stabsteifigkeiten" wird der Einfluß der axialen Beanspruchung, der Biegebeanspruchung einschließlich des Verlaufs der Biegemomente entlang der Stäbe und der Bewehrung auf die Biegesteifigkeit berücksichtigt. Damit wird den wesentlichsten Einflußgrößen, die eine materialmäßige Nichtlinearität des Verformungsproblems verursachen, Rechnung getragen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen überwiegend mit Hilfe der "wirksamen Stabsteifigkeiten" durchgeführt und dabei kleinere Ungenauigkeiten, die bei einem Näherungsverfahren durchaus vertretbar erscheinen, hingenommen. Da bei den näherungsweise durchzuführenden Grenzlastuntersuchungen zum Studium einzelner Einflußgrößen meist weniger die absolute Größe der Grenzlasten als ihre Vergleiche miteinander interessieren, mindert die Näherung deren Aussagekraft wenig.

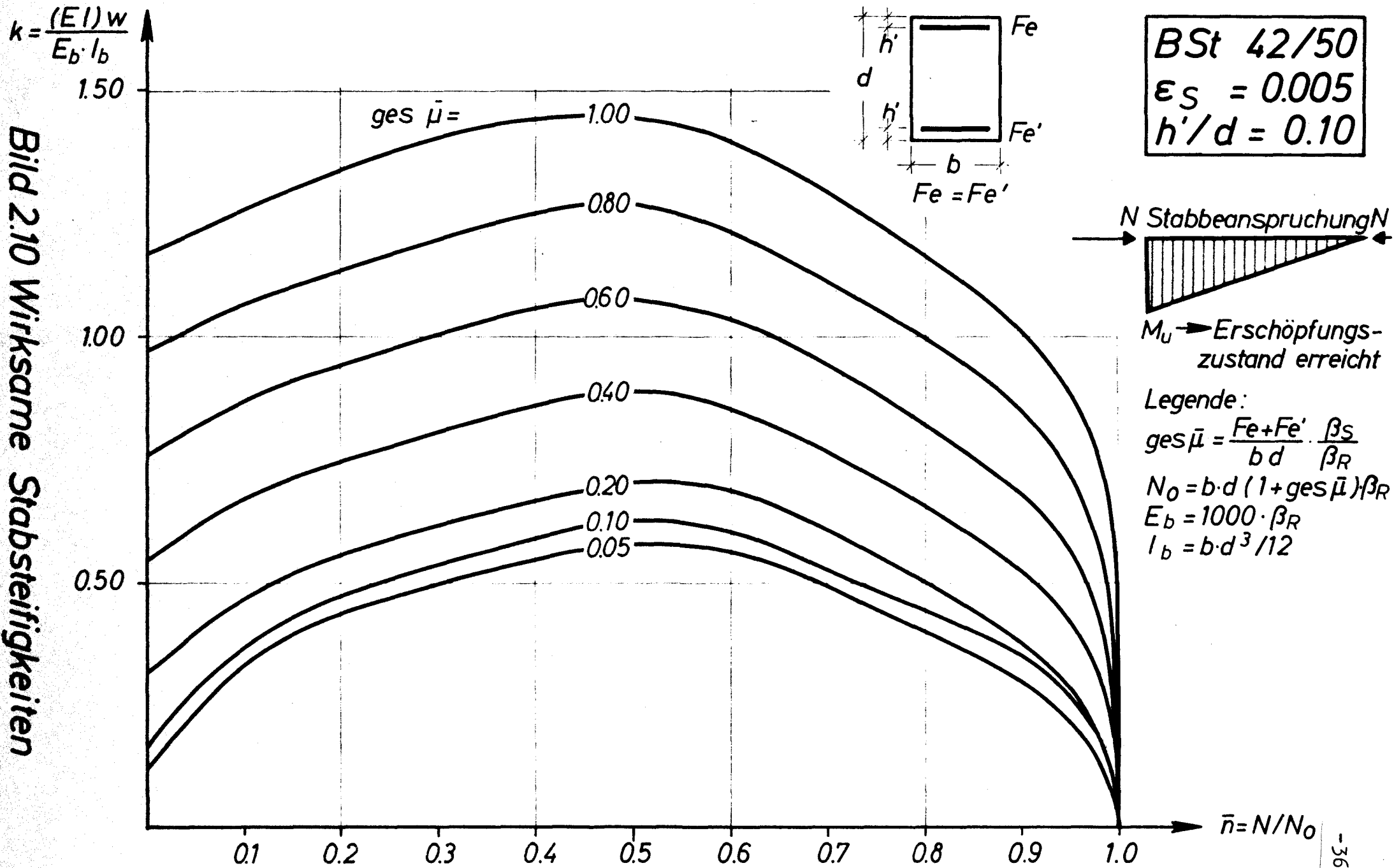
Die Anwendung "wirksamer Stabsteifigkeiten" für praktische Stabilitätsnachweise erscheint wegen der einfachen, schematischen Behandlung aller Stäbe eines Systems angebracht. Ein Übergang zu den - genaueren - rein numerischen Verfahren könnte die Einführung von Zwischenknoten innerhalb der Stäbe entsprechend dem jeweiligen Momentenverlauf sein. Die "wirksamen Stabsteifigkeiten" könnten dann für jeden Teilstab mit symmetrischer Steifigkeitsverteilung bestimmt werden. Die Anzahl der unbekannten Verformungsgrößen würde dann größer werden. Diese Verfeinerung ist - nach Ansicht des Verfassers - erst dann sinnvoll, wenn die übrigen Rechenannahmen auch entsprechend weiterentwickelt werden



können. Anschließend werden in den Bildern 2.10, 2.11 und 2.12 "wirksame Stabsteifigkeiten" für den praktischen Bereich der Einflußgrößen angegeben. Diese Ergebnisse werden noch in Abschnitt 3.4 mit Hilfe eines einfachen Ansatzes angenähert und so praktischen Rechnungen zugänglich gemacht. Bei Anwendung der Werte sind die Voraussetzungen nach Abschnitt 2.1.2 zu beachten (Rechteckquerschnitt, symmetrische Bewehrungsanordnung).

Zur Abschätzung der Fehler, die bei der Verformungsrechnung mittels "wirksamer Stabsteifigkeiten" entstehen, werden ebenfalls im oben genannten Abschnitt Vergleichsbeispiele zwischen einem strengeren, numerischen Verfahren [32] und dem hier zu entwickelnden angegeben.

Bild 2.10 Wirksame Stabsteifigkeiten



$$k = \frac{(EI)w}{E_b \cdot I_b}$$

Bild 2.11 Wirksame Stabsteifigkeiten

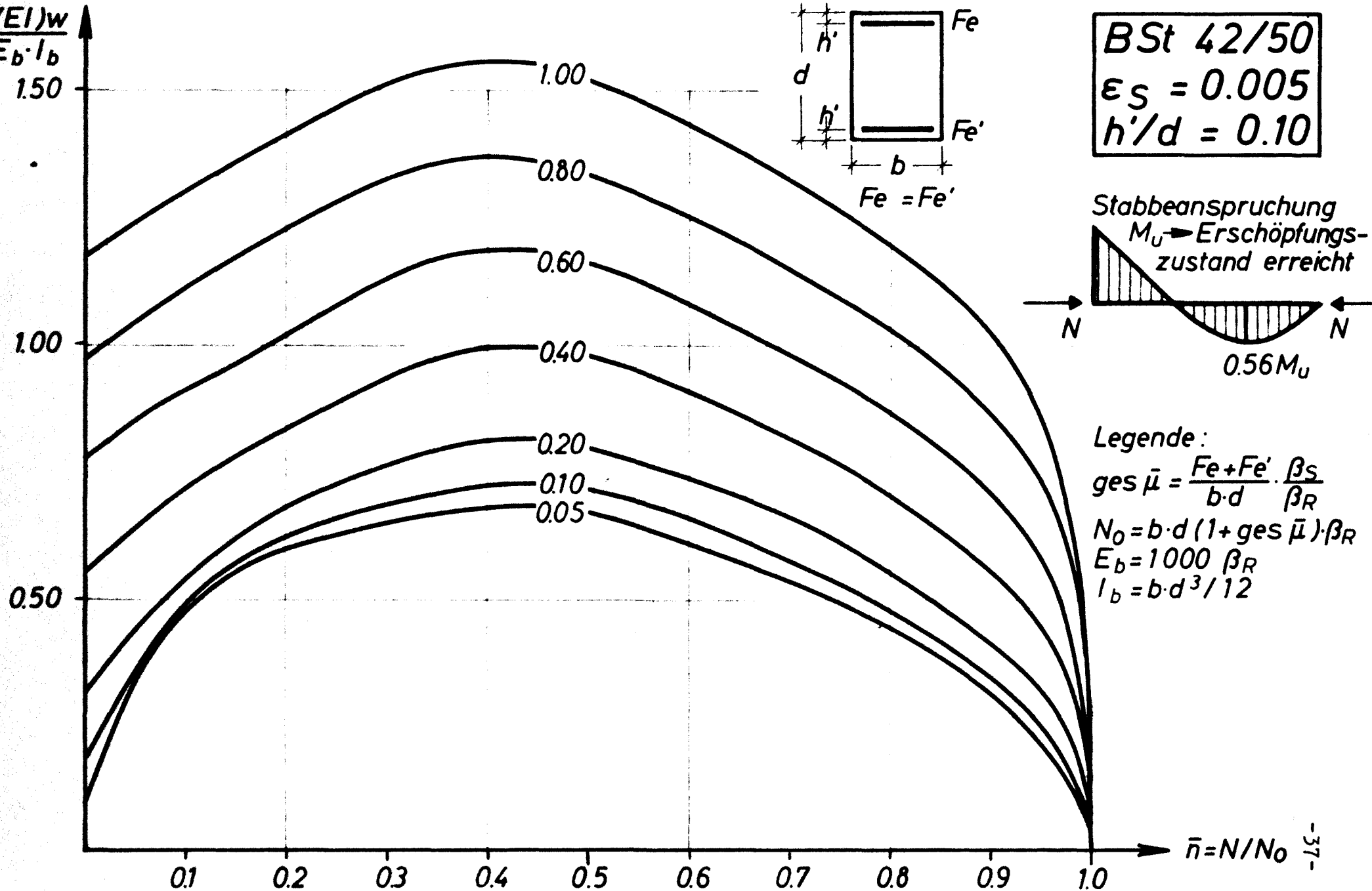
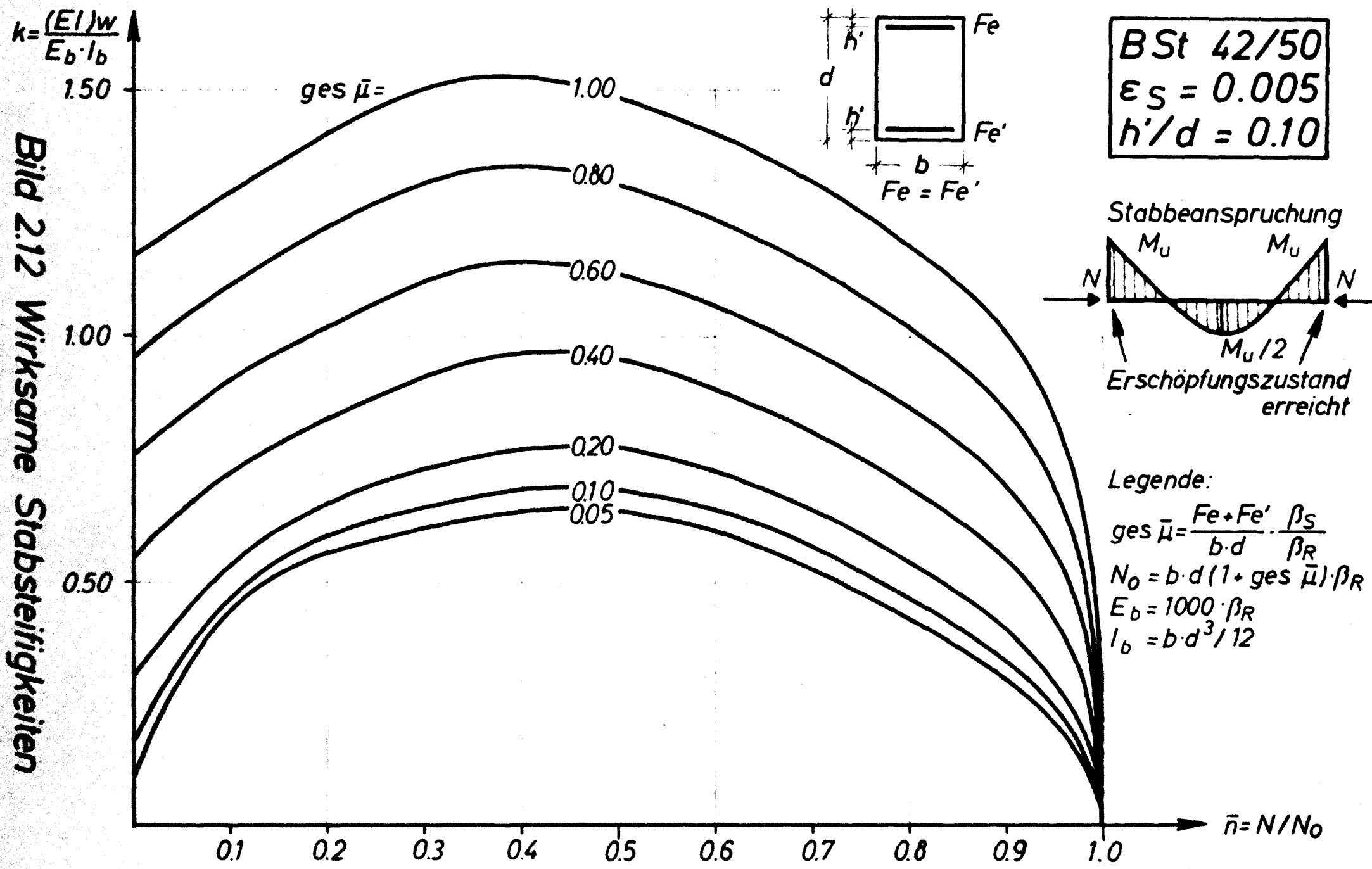


Bild 2.12 Wirksame Stabsteifigkeiten



## 2.3 Stabsysteme mit nichtlinearem Last-Verformungsverhalten

### 2.3.1 Linearisierung des Problems durch Anwendung der dem Beanspruchungs-Verformungszustand angepaßten "wirksamen Stabsteifigkeiten"

Der Beanspruchungs-Verformungszustand eines beliebigen Stabsystems läßt sich - bei Anwendung des Weggrößenverfahrens - in folgender Kurzform nach [18] bzw.[37] angeben:

$$\underline{p} = \underline{K} \cdot \underline{d} \quad (2.14)$$

Zunächst soll auf eine detaillierte Wiedergabe der Gl.(2.14) verzichtet werden (siehe hierzu Abschnitt 2.4). Es sei lediglich bemerkt, daß die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems  $\underline{K}$  von zwei vektorialen Größen wie folgt abhängt:

$$\underline{K} = \underline{K}(\underline{p}, \underline{EI}) \quad (2.15)$$

Die symbolische Gl.(2.15) läßt erkennen, daß bei konstanter Last -  $\underline{p}$  = eine vorgegebene Laststufe - die Variation der Steifigkeitsmatrix nur von den Änderungen des Steifigkeitsvektors  $\underline{EI}$  abhängt:

$$\delta \underline{K} = \underline{K}(\underline{p}, \delta \underline{EI}) \quad (2.16)$$

Ist die Variation  $\delta \underline{K}$  klein, so gilt die Gl.(2.14) auch für Systeme und Baustoffe mit nichtlinearem Last-Verformungs-Diagramm.

Die praktische Durchführung der Verformungsrechnung einer Laststufe kann dann wie folgt vorgenommen werden:

- 1) Vorgabe einer System-Lastanordnung mit geschätzten Biegesteifigkeiten  $\underline{p}$ ,  $\underline{EI}$ .
- 2) Aufstellung der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  nach Gl.(2.15) und Bestimmung des Verformungsvektors  $\underline{d}$ .
- 3) Berechnung der inneren Schnittgrößen aus dem Vektor  $\underline{d}$  und neue Definition der Steifigkeitsmatrix nach Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4.

- 4) Wiederholung der Operationen nach Punkt 2) und 3),  
bis die Bedingungen

$$\begin{aligned}\delta \underline{EI} &+ 0 \\ \delta \underline{d} &+ 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

erfüllt sind.

Die Erfüllung der Gl.(2.17) bedeutet, daß ein Gleichgewichtszustand am verformten System nach Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der nichtlinearen Verformungseigenschaften des Stahlbetons errechnet worden ist. Die Linearisierung der Verformungsrechnung kann also mittels Variation der Stabsteifigkeiten iterativ erreicht werden.

#### 2.3.2 Anwendung des Weggrößenverfahrens der Elastizitätstheorie für die Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung

In Stockwerkrahmen sind zwei Typen von Stäben nach Art der Beanspruchung zu unterscheiden, die sich in ihrem Verformungsverhalten grundsätzlich verschieden zeigen:

##### 1. Druckstäbe (Stiele)

Die Stiele werden auf Biegung mit Achsdruck beansprucht. Ihre Besonderheit liegt im allgemeinen darin, daß im Bereich der Stablänge keine Querlast angreift und so die auf die Verbindungslinie der Stabenden bezogene Momentenlinie aus Achsdruck und Stabendquerkraft einen linearen Verlauf hat. Eben diese Tatsache erlaubt weniger komplizierte explizite Lösungen für das Verformungsproblem des Stabes (vergl.[13]).

##### 2. Biegestäbe (Riegel)

Die Riegel werden ebenso mit Biegung und Achsdruck beansprucht, es überwiegt jedoch die Biegung.

Im folgenden werden die Grundbeziehungen der Deformationsmethode der Elastostabstatik für Stiele und Riegel gesondert zur Weiterverwendung aus [10] bzw. [13] wie folgt wiedergegeben:

## 1. Druckstäbe konstanter Biegesteifigkeit EI

Unter den genannten Bedingungen gelten nach Bild 2.4 folgende Beziehungen:

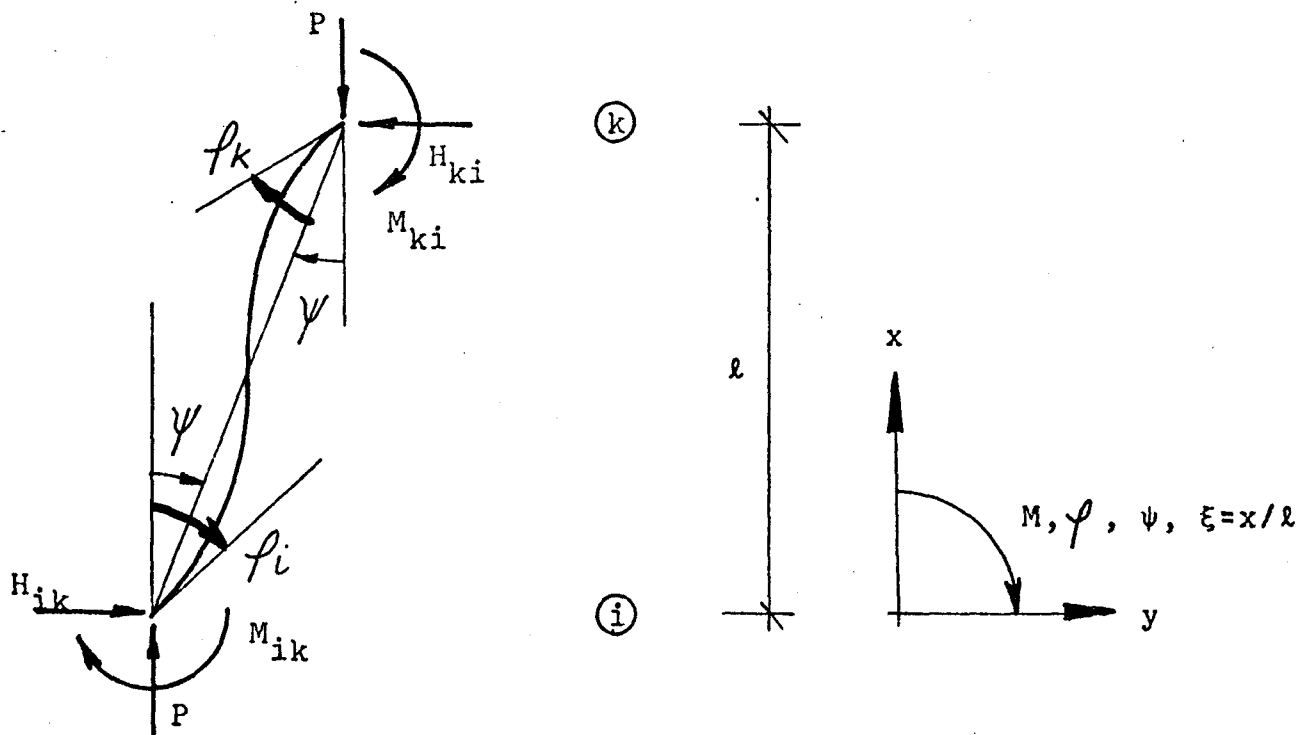


Bild 2.4 Beanspruchungs-Verformungszustand eines Druckstabes

Die Differentialgleichung der Biegelinie eines Stabes mit konstanter Biegesteifigkeit  $(EI)_w$  geht bei Verwendung der Bezeichnung  $\epsilon = 2\sqrt{P/(EI)_w}$  nach zweifachem Differenzieren in die folgende über:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \left( \frac{\varepsilon}{\ell} \right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2.18)$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y = C_1 + C_2 \cdot \varepsilon \cdot \xi + C_3 (\cos \varepsilon) \xi + C_4 (\sin \varepsilon) \xi \quad (2.19)$$

Die zugehörigen Integrationskonstanten sind:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{l_{ik}}{\epsilon} \frac{(\varphi_i - \varphi_k)(\epsilon - \sin \epsilon) + \epsilon(\psi_{ik} - \varphi_i)(1 - \cos \epsilon)}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon} \\
 C_2 &= \frac{l_{ik}}{\epsilon} \varphi_i - C_4 \\
 C_3 &= -C_1 \\
 C_4 &= \frac{l_{ik}}{\epsilon} \frac{(\varphi_i - \varphi_k)(1 - \cos \epsilon) + \epsilon(\psi_{ik} - \varphi_i) \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Hieraus folgen die Grundbeziehungen

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= A\varphi_i + B\varphi_k - (A + B)\psi \\
 M_{ki} &= A\varphi_k + B\varphi_i - (A + B)\psi
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

für beidseitig elastische Einspannung und

$$M_{ik} = (A + B)\left(1 - \frac{B}{A}\right)(\varphi_i - \psi)$$

für einseitig elastische anderseitig gelenkige Lagerung.

Aus dem Stabgleichgewicht ergibt sich:

$$H_{ik} = -H_{ki} = \frac{1}{l}[(A+B)(\varphi_i + \varphi_k) - (2(A+B) - P \cdot l)\psi]$$

bzw.

$$H_{ik} = -H_{ki} = \frac{1}{l}[(A+B)\left(1 - \frac{B}{A}\right)(\varphi_i - \psi) + P \cdot l \cdot \psi] \tag{2.22}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{EI}{l} \cdot \alpha; \quad \alpha = \frac{\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon} \\
 B &= \frac{EI}{l} \cdot \beta; \quad \beta = \frac{\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon}{2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$C = \frac{EI}{l}(\alpha + \beta) = A + B$$

$$D = \frac{EI}{l}(\alpha - \beta) = A - B \tag{2.24}$$

## 2. Biegestäbe konstanter Biegesteifigkeit EI

Für einen Biegestab kann eine Vielzahl der Belastungsbilder vorkommen. In der vorliegenden Arbeit soll der häufigste Beanspruchungsfall, der unter konstanter



Streckenlast, behandelt werden. Es wird jedoch gezeigt, daß die hier angegebenen Formeln auch für stetig verteilte Lasten näherungsweise angewendet werden dürfen. Im übrigen lassen sich für beliebige Lasten exakte Lösungen ableiten, wie es z.B. in [10] für einige andere Fälle gezeigt wird.

Zunächst sollen die Volleinspannmomente nach Theorie II. Ordnung für den Biegestab nach Bild 2.5 angegeben werden.

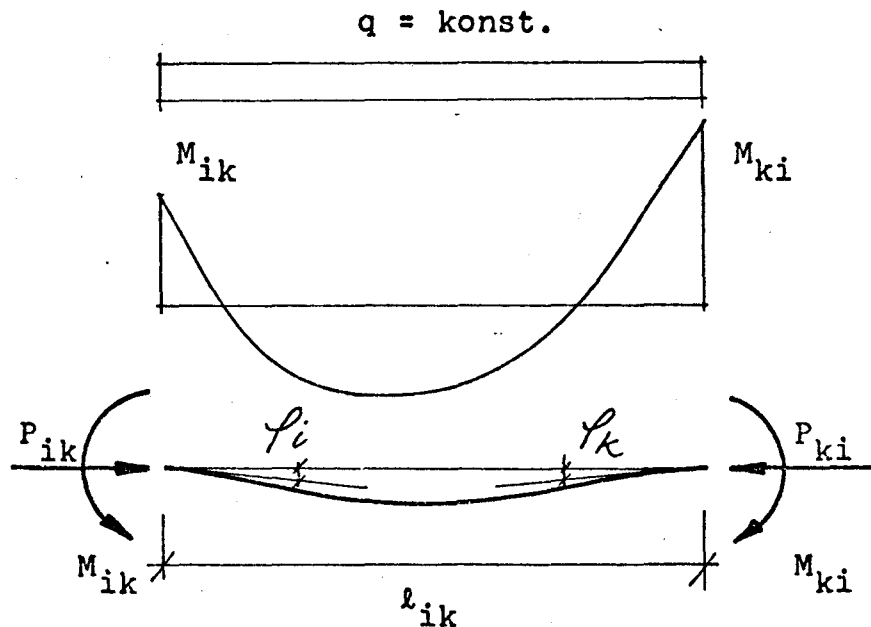


Bild 2.5 Beanspruchungs-Verformungszustand eines Biegestabes mit konstanter Streckenlast

Die Volleinspannmomente nach [10] lauten:

$$M_{ik}^o = \frac{l_i \cdot q}{2P_{ik}} (A_{ik} - B_{ik}) - \frac{EI_{ik}}{P_{ik}} q \quad (2.25)$$

Nach Umformung und Einsetzen der Größe  $\epsilon = l\sqrt{P/EI}$  erhält man:

$$M_{ik}^o = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{6(\alpha - \beta) - 12}{\epsilon^2} \quad (2.26)$$

oder

$$M_{ik}^0 = \frac{q l^2}{12} \phi \quad (2.27)$$

Die Volleinspannmomente nach Theorie II. Ordnung lassen sich einfach auf die nach Theorie I. Ordnung zurückführen. Die Funktion  $\phi$  nimmt bei Grenzübergang  $\epsilon = 0$  den Wert 1,0 an, was der Theorie I. Ordnung entspricht.

Aus Bild 2.6 läßt sich erkennen, daß im großen Bereich der  $\epsilon$  - Werte wenig Unterschied zwischen Volleinspannmomenten nach Theorie I. und II. Ordnung vorhanden ist.

Im folgenden wird bewiesen, daß bei den Riegeln der in dieser Arbeit behandelten Rahmen die Stabkennzahl  $\epsilon$  meist in diesem Bereich liegt.

Die Stabkennzahl ist

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{P}{(EI)_W}} = l \sqrt{\frac{v \cdot b \cdot d \cdot \beta_R (1 + \text{ges}\bar{u})}{E_b (b \cdot d^3 / 12) \cdot k}}$$

wobei die Parameter  $\text{ges}\bar{u}$ ,  $k$  und  $v$  dem Bild 2.12 zu entnehmen sind. Nach Umformung und Kürzung - wobei der Ursprungsmodul des Betons nach Bild 2.2  $E_b = 1000 \beta_R$  angesetzt wurde - erhält man die Gleichung:

$$\epsilon = \frac{l}{d} \sqrt{\frac{12}{1000} \cdot \frac{v \cdot (1 + \text{ges}\bar{u})}{k}} \quad (2.28)$$

Aus Gl.(2.28) lassen sich mit Hilfe des Bildes 2.12 praktische Maximalwerte von  $\epsilon$  für Rahmenriegel aus Stahlbeton errechnen. Der Definitionsbereich der Funktion (2.28) wird durch die folgenden praktischen Extremwerte der unabhängigen Variablen angegeben:

a) Die bezogene Riegellänge

$$l/d \leq 30$$

wird für schlaffbewehrte Rahmenriegel als praktische obere Grenze angesehen. Reelle Konstruktionen werden

schon aus Gründen der Geringhaltung der Durchbiegungen kaum mit schlankeren Riegeln ausgeführt. Diese Vorstellung deckt sich mit der von anderen Verfassern (siehe z.B.[42]).

- b) Rahmenriegel werden überwiegend auf Biegung beansprucht. Sie versagen meist infolge Bruches der Zugbewehrung. Als maximal mögliche Normalkraftbeanspruchung wird der zu dem sog. "Balance Point" der Interaktionskurve der Bruchschnittgrößen (siehe Abschnitt 4.1) gehörige Achsdruck nach Tafel 4.1 angesehen:

$$v \lesssim 0,3$$

- c) Die Bewehrung variiert in den Grenzen

$$0,05 < \text{ges}\bar{u} < 1,00$$

Der in den Punkten a,b und c festgelegte Definitionsbereich der Funktion (2.28) hat demnach folgende Extremwerte:

1) Wenn  $v = 0 + \underline{\underline{\epsilon_1 = 0}}$   
 $\text{ges}\bar{u} \neq 0$

2) Wenn  $v = 0,3 + \underline{\underline{\epsilon_2 = 30 \sqrt{\frac{12}{1000} \sqrt{\frac{0,3(1+0,05)}{0,61}}}} = \underline{\underline{2,36}}$   
 $\text{ges}\bar{u} = 0,05; k = 0,61$  (aus Bild 2.12)

3) Wenn  $v = 0,3 + \underline{\underline{\epsilon_3 = 2,08}}$   
 $\text{ges}\bar{u} = 1,00; k = 1,56$  (aus Bild 2.12)

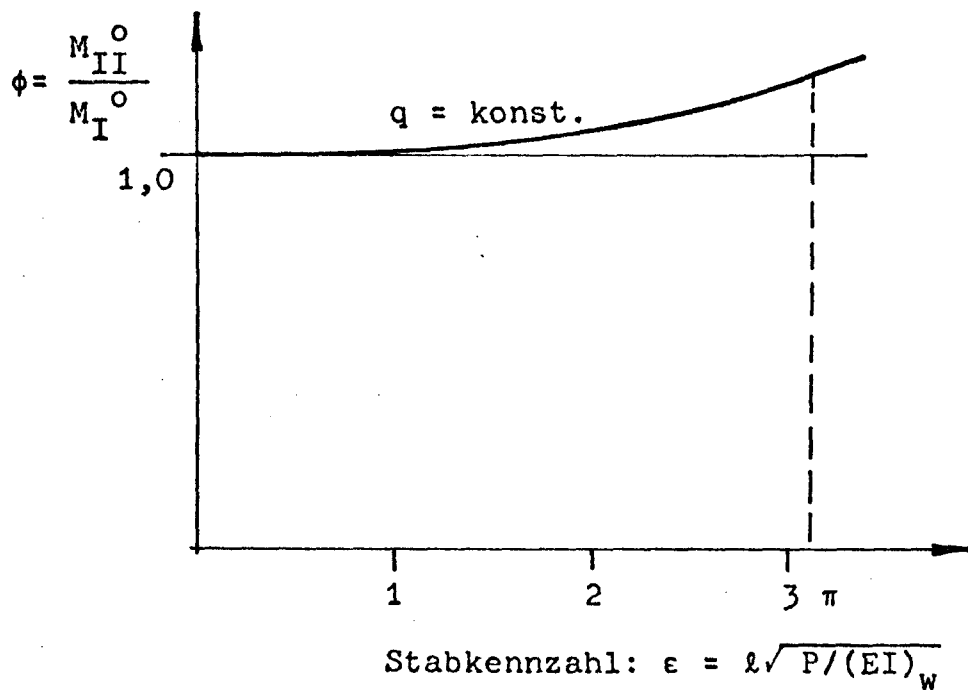
Damit ist der Beweis erbracht, daß für praktische Konstruktionen die Stabkennzahl für Riegel im Bereich der Darstellung von Bild 2.6 bleibt und der Wert der Funktion  $\phi \leq 1,1$  ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß für die hier angestrebte Näherung unter konstanter und stetig verteilter Riegelquerlasten die Volleinspannmomente nach Theorie I. Ordnung verwendet werden können. Im

folgenden wird deshalb die axiale Beanspruchung der Riegel vernachlässigt.

Die Grundbeziehungen für Riegel lauten:

$$\begin{aligned} M_{ik} &= A_{ik} \gamma_i + B_{ik} \gamma_k + M_{ik}^0 \\ M_{ki} &= A_{ki} \gamma_k + B_{ki} \gamma_i + M_{ki}^0 \end{aligned} \quad (2.29)$$



**Bild 2.6** Quotient der Volleinspannmomente nach Theorie II. bzw. I. Ordnung (siehe Gl.(2.27))

### 2.3.3 Diskussion der Ergebnisse der Elastizitätstheorie

Die Formeln in (2.23) lassen deutlich erkennen, daß axiale Beanspruchung immer - auch bei Verwendung eines elastischen Spannungs-Dehnungsgesetzes - eine lastabhängige Nichtlinearität zwischen Beanspruchungen und Verformungen hervorruft. Die Ausdrücke  $\alpha$  und  $\beta$

drücken diesen Einfluß aus.

Es tritt hier aber noch eine materialabhängige Nicht-linearität auf, die in dem Ausdruck der "wirksamen Stabsteifigkeit"  $(EI)_w$  erscheint. Die beiden Einflüsse werden durch die symbolische Funktion

$$\epsilon = f( (EI)_w (N,M) ) \quad (2.30)$$

gekoppelt. Die Aufgabe wird daher sein, diese Koppelung durch Iteration zu erfüllen.

#### 2.3.4 Matrizen-Darstellung der Ergebnisse der Elastizitätstheorie

Das vorliegende Stabilitätsproblem erfordert einen hohen Rechenaufwand, der nur mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen zu bewältigen ist. Bei Benutzung einer Digitalrechenanlage ist es zweckmäßig, eine übersichtliche, computergerechte Darstellung des Problems mit Hilfe der Matrizen Schreibweise vorzunehmen.

Die in Abschnitt 2.3.2 (Gl.(2.21)bis(2.24)) angegebenen Beziehungen lassen sich wie folgt komprimiert darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{p_1} &= \begin{bmatrix} H_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C/l^2 - P/l & C/l \\ C/l & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2C/l^2 + P/l & C/l \\ -C/l & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \\ \underline{p_2} &= \begin{bmatrix} H_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2C/l^2 + P/l & -C/l \\ C/l & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2C/l^2 - P/l & -C/l \\ -C/l & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die Bedeutung der Stabendfußzeiger 1 und 2 ist dem Bild 2.7 zu entnehmen. Die Vektoren  $\underline{p_1}$  bzw.  $\underline{p_2}$  wirken auf das entsprechend bezeichnete Stabende. Die Gl.(2.31) gelten sowohl für Druckstäbe als auch für Biegestäbe. Im Fall des Biegestabes geht sie - entsprechend der Voraussetzung  $y_1 = y_2 = 0$  - in eine vereinfachte Form über.

Diese Formulierung des Beanspruchungs-Verformungszustandes eines Stabes ist zweckmäßig (siehe [37]), da sie die getrennte, einfache Behandlung beider Stabenden bei Aufstellung von Knotengleichgewichtsgleichungen erlaubt.

In Kurzschreibweise lautet Gl.(2.31):

$$\begin{aligned}\underline{p}_1 &= \underline{K}_{11} \cdot \underline{d}_1 + \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_2 \\ \underline{p}_2 &= \underline{K}_{21} \cdot \underline{d}_1 + \underline{K}_{22} \cdot \underline{d}_2\end{aligned}\tag{2.32}$$

Zur Lösung einer allgemeinen Aufgabe wäre noch eine Transformation zwischen Stabeigen- und Systemkoordinaten vorzunehmen. Hierauf kann im vorliegenden Fall - rechtwinkliges System - bei einem gemeinsamen Stab- und System-Koordinatensystem verzichtet werden.

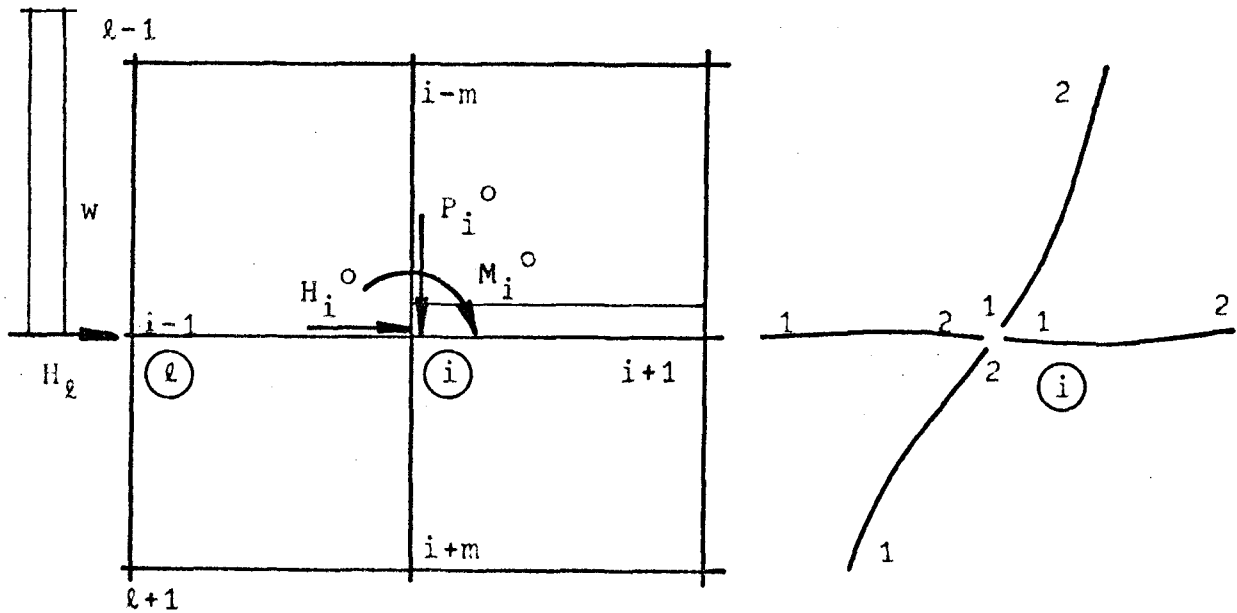
Im folgenden wird die Anwendung der Gl.(2.31) bzw.(2.32) auf das Gesamtsystem vorgenommen.

## 2.4 Rechenprogramm zur näherungsweisen Bestimmung der inelastischen Grenzlast von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

Bereits in Abschnitt 2.3.1 wurde die Linearisierung der Verformungsrechnung mittels Variation der beanspruchungsabhängigen "wirksamen Stabsteifigkeiten" erläutert. Im folgenden wird deshalb zunächst ein bekannter Lastvektor  $\underline{p}$  und bekannter Steifigkeitsvektor  $\underline{EI}$  vorausgesetzt. Die folgenden Zusammenhänge werden nach der Elastizitätstheorie formuliert.

### 2.4.1 System und Belastungen

Die äußeren Belastungen des Knotens "i" und dem der anschließenden Stäbe zeigt Bild 2.7. Zusammen mit der definierten Systemgeometrie und den vorausgeschätzten Biegesteifigkeiten ergeben die Belastungen eine System-Lastanordnung, aus deren Gleichgewichtszustand die unbekannten Verformungsgrößen bestimmbar sind.



**Bild 2.7** Belastungen am Knoten "i".  
Bezeichnung der Stabenden

Die unbekannten Verformungskomponenten sind - entsprechend der getroffenen Voraussetzung undehnbarer Stabachsen - je Knoten eine Verdrehung ( $\varphi_i$ ) und eine Verschiebung ( $y_i$ ). Die Knotenverschiebungen eines Stockwerks sind jedoch voneinander abhängig, da die Verschiebungsfigur ein zwangsläufig kinematisches Gebilde ist. Sie stellen deshalb in jedem Stockwerk lediglich eine unbekannte Verschiebung dar. So gilt die Gleichung:

$$y_l = y_{(l-1) \cdot m + 1} = \dots = y_{l \cdot m} \quad (2.33)$$

Folglich ergibt sich die Anzahl der Unbekannten zu:

$$n_0 = n \cdot m + n \quad (2.34)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten stehen die Knotengleichgewichtsgleichungen

$$\underline{p_i} - \sum_k \underline{p_{ik}} = 0 \quad (2.35)$$

und die horizontalen Stockwerk-Gleichgewichtsgleichungen

$$H_l - \sum_{i=(l-1) \cdot m+1}^{l \cdot m} H_i = 0 \quad (2.36)$$

zur Verfügung.

(Hierbei bedeuten  $p_i$  den auf Knoten "i" einwirkenden Vektor und  $p_{ik}$  die Vektoren der inneren Beanspruchungen der Stäbe "ik". ( $k = i-1, i+1, i-m, i+m$  nach Bild 2.7). Weiterhin bedeutet  $H_l$  die auf das Stockwerk "l" senkrecht zu den Stielachsen einwirkende äußere Last, der die Querkkräfte an den Knoten "i",  $H_i$  das Gleichgewicht halten.)

#### 2.4.2 Formulierung des Verformungsproblems in Matrizen-Darstellung

Der Lastvektor und der Verformungsvektor des Gesamtsystems lassen sich wie folgt angeben (vergl. z.B.[18],[37]).

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \vdots \\ \underline{p}_i \\ \vdots \\ \underline{p}_{n \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^0 \\ M_1^0 \\ \vdots \\ H_i^0 \\ M_i^0 \\ \vdots \\ H_{n \cdot m}^0 \\ M_{n \cdot m}^0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \vdots \\ \underline{d}_i \\ \vdots \\ \underline{d}_{n \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \varphi_i \\ \vdots \\ y_{n \cdot m} \\ \varphi_{n \cdot m} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$



Die Gleichung (2.38) enthält zunächst  $2 \cdot n \cdot m > n \cdot m + n$  (siehe Gl.(2.34)) Verformungskomponenten, die erst bei praktischer Durchführung der Berechnung unter Ausnutzung der Gl.(2.33) auf die Anzahl  $n_0 = n \cdot m + n$  reduziert werden. Diese Verfahrensweise ermöglicht eine zweckmäßig-schematische Behandlung der Vektoren  $\underline{p}$  und  $\underline{d}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$ .

Die Gln.(2.37) und (2.38) werden in der Gleichgewichtsgleichung des Systems mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  miteinander verknüpft:

$$\underline{p} = \underline{K} \cdot \underline{d} \quad (2.39)$$

Die Gl(2.39) beschreibt für ein System - Lastanordnung bekannter Stabsteifigkeiten einen Beanspruchungs-Verformungszustand im Sinne der Theorie II. Ordnung, wenn in deren Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  der Einfluß der Stabverformungen mitenthalten ist. Dies ist auch der Fall, wie aus Gl.(2.31) ersichtlich ist.

Im folgenden wird die Steifigkeitsmatrix des Systems  $\underline{K}$  aus der der einzelnen Stäbe aufgebaut. Die Gl.(2.35) liefert unter Anwendung der Gl.(2.32) die Gleichgewichtsbedingung des Knotens "i":

$$\begin{aligned} P_i = & \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_{i-m} + \underline{K}_{21} \cdot \underline{d}_{i-1} + (\underline{K}_{11} + \underline{K}_{22} + \underline{K}_{11} + \underline{K}_{22}) \cdot \underline{d}_i + \\ & \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_{i+1} + \underline{K}_{21} \cdot \underline{d}_{i+m} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich aus Gl.(2.36) die Stockwerkverschiebungsgleichungen in folgender Form ableiten:

$$H_\ell = \underline{K}_\ell \cdot y_\ell \quad (2.41)$$

(wobei die Stockwerksteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_\ell$  aus Gl.(2.32) einfach bestimmbar ist. Es wird jedoch noch gezeigt, daß auf eine gesonderte, vorherige Bestimmung von  $\underline{K}_\ell$  verzichtet werden kann).

Die Gleichgewichtsbedingung (2.40) liefert für das Gesamtsystem die detaillierte Form der Gl.(2.39):

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{i-m} \\ p_{i-1} \\ p_i \\ p_{i+1} \\ p_{i+m} \\ \vdots \\ p_{n \cdot m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \sum \underline{K}_{11} & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \sum \underline{K}_{22} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \vdots \\ \underline{d}_{i-m} \\ \underline{d}_{i-1} \\ \underline{d}_i \\ \underline{d}_{i+1} \\ \underline{d}_{i+m} \\ \vdots \\ \underline{d}_{n \cdot m} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Zur Lösung müssen die Gln.(2.41) und (2.42) gleichzeitig erfüllt werden. Berücksichtigt man die kinematische Bedingung (2.33), wonach in jedem Stockwerk nur eine unbekannte Verschiebung vorhanden ist, so läßt sich erkennen, daß Gl.(2.41) in der Gl.(2.42) implizit enthalten ist. Vor Auflösung der Gl.(2.42) brauchen lediglich einige schematische Operationen hiermit durchgeführt zu werden.

Summiert man nämlich jene Zeilen in Gl.(2.42) - und die zugehörigen Spalten in  $\underline{K}$  - welche den Kraftkomponenten der Knoten eines Stockwerks "l" entsprechen, so ergibt sich für jedes Stockwerk eine Gleichung entsprechend Gl.(2.41).

Mechanisch bedeutet dieser Vorgang das Errechnen der Stockwerkverschiebung  $y_\ell$  aus der Stockwerksteifigkeit  $\underline{K}_\ell$  und der Stockwerkquerkraft  $H_\ell$ .

Nach Durchführung der geschilderten Operationen und Umordnung ergibt sich aus Gl.(2.42) folgende Gleichung:

$$\begin{bmatrix} M_1^o \\ \vdots \\ M_i^o \\ \vdots \\ M_{n \cdot m} \\ H_1 \\ \vdots \\ H_\ell \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_{n \cdot m} \\ y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Das erhaltene Gleichungssystem enthält  $n_o = n \cdot m + n$  Unbekannte und die entsprechende Anzahl von Gleichungen; es läßt sich nach bekannten linearen Verfahren auflösen. Auf eine detaillierte Wiedergabe der erwähnten und noch folgenden Matrizenoperationen kann verzichtet werden, da diese mit Hilfe von Standard-Rechenprogrammen der Matrizenrechnung durchgeführt werden können.

#### 2.4.3 Iterative Bestimmung der Systemverformungen unter vorgegebener Belastung

Unter Voraussetzung der bekannten Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  und des bekannten Lastvektors  $p$  lautet die Lösung des Gleichungssystems (2.43) wie folgt:

$$\underline{d} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot p \quad (2.44)$$

Das Verformungsproblem wurde also auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt, das auf der Grundlage der reinen Elastizitätstheorie aufgestellt worden ist. In der Wirklichkeit sind die Koeffizienten der Matrix  $\underline{\underline{K}}^{-1}$  sowohl geometrisch als auch

materialmäßig nichtlinear, wie aus Gl.(2.15) in Verbindung mit den Gln.(2.28) und (2.23) zu ersehen ist. Die Auflösung des Gleichungssystems (2.44) kann deshalb nur mit Hilfe einer iterativen Rechnung erfolgen.

Die Linearisierung durch Iteration ist schon in Abschnitt 2.3.1 im wesentlichen angedeutet worden. Die Rechenschritte der iterativen Bestimmung eines Beanspruchungs-Verformungszustandes unter einer vorgegebenen Laststufe werden kurz wie folgt angegeben:

- 1) Vorgabe der System-Lastanordnung, Querschnitte, Bewehrungen und Materialkennwerte.
- 2) Rechenschritte zur Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität nach der Elastizitätstheorie:
  - a) Vorschätzung des Lastvektors  $\underline{p}^j$  und Definition des Steifigkeitsvektors  $\underline{EI}^j$ ;
  - b) Aufstellung der Systemsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}^j = \underline{K}(\underline{p}^j, \underline{EI}^j)$  nach Gl. (2.42) aus den Elementsteifigkeitsmatrizen nach Gl.(2.31);
  - c) Umformung der Gl.(2.42) unter Erfüllung der Gl.(2.41)  $\rightarrow$  (2.43)
  - d) Lösung der Gl. (2.43)  $\rightarrow$  (2.44)  $\rightarrow \underline{d}^j$
  - e) Berechnung der inneren Beanspruchungen aus  $\underline{d}^j$  nach Gl.(2.21) und (2.29)  $\rightarrow N_i^j, M_i^j$
- 3) Rechenschritte zur Berücksichtigung der materialmäßigen Nichtlinearität des Stahlbetons:
  - a) Bestimmung der Krümmungen in diskreten Rechenpunkten nach Abschnitt 2.2.3  $\rightarrow$   

$$K_i^{j+1} = f(N_i^j, M_i^j)$$
  - b) Berechnung der "wirksamen Stabsteifigkeiten"  

$$\underline{EI}^{j+1} = f_1(K_i^{j+1} (N_i^j, M_i^j)) \text{ nach Abschnitt 2.2.4}$$

4) Iteration, durch Wiederholung der Rechenoperationen nach 2) und 3), bis die Bedingung

$$\begin{aligned} \underline{d}^{j+1} - \underline{d}^j &= \delta \underline{d} \rightarrow 0 \\ \underline{EI}^{j+1} - \underline{EI}^j &= \delta \underline{EI} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

erfüllt ist.

(Der Index "j" weist auf die Anzahl der Iterationen innerhalb einer Laststufe hin, der Index "i" kennzeichnet den Ort innerhalb der Stäbe).

Die Erfüllung der Bedingung (2.17) bedeutet, daß zwischen vorgegebenen und errechneten Stabsteifigkeiten der Unterschied eine Fehlerschranke unterschreitet. Damit ist das System unter definierten Lasten ( $\underline{p}$ ) und unter Berücksichtigung der nichtlinearen Verformungseigenschaften des Stahlbetons im Gleichgewicht im Sinne der Theorie II. Ordnung. Durch einen zusätzlichen Iterationsvorgang können jetzt die Fehler im Lastvektor  $\underline{p}$  (nach Punkt 2 a) so korrigiert werden, daß  $\underline{p}$  dem errechneten Gleichgewichtszustand angepaßt und der ganze Vorgang wiederholt wird. Dies ist jedoch nicht nötig, wenn man eine stetige Laststeigerung vornimmt, in der  $\Delta \underline{p}$  klein gehalten wird. In diesem Fall kann der Lastvektor der vorhergehenden Laststufe unverändert übernommen werden, da geringfügige Fehler in  $\underline{p}$  die Matrix  $\underline{K}$  und damit  $\underline{d}$  wenig beeinflussen.

#### 2.4.4 Steuerung der Laststeigerung über die Lastverschiebungsdiagramme ; Kriterien für die inelastische Grenzlast

Die Granzlastbestimmung wird unter steigender Belastung nach Abschnitt 2.4.3 durchgeführt. Die Kriterien sind (nach Bild 1.1 und Abschnitt 2.1.1) für Stabilitätsbruch

$$\frac{dP}{dy} \rightarrow 0$$

und für Materialbruch

$$|\epsilon_i| \geq |\epsilon_u|$$

Zur Steuerung der Laststeigerung wird ein Last-Verformungsdiagramm eines charakteristischen Systempunktes verwendet. Zunächst wird ein beliebiger, möglichst jedoch nicht in der Nähe der Traglast liegender Punkt des Last-Verschiebungsdiagramms (Bild 2.8) bestimmt. (Punkt A). Die Sehne  $\overline{OA}$  entspricht einem näherungsweise linearen Verformungsverhalten. Nach einer beliebigen Laststeigerung - die allerdings noch unterhalb der Traglast liegen muß - errechnet man den Punkt B. Die Winkelabweichung zwischen  $\overline{OA}$  und  $\overline{AB}$  ist das Maß der Nichtlinearität, wonach weitere größere oder geringere Laststeigerungen vorgenommen werden können. Die Genauigkeit der Traglastbestimmung hängt von der Feinheit der letzten Laststufen ab. In den folgenden Untersuchungen (Abschnitt 3) wird eine auf die Traglast bezogene Genauigkeit von  $\leq 1,0\%$  angestrebt. Eine weitere Steigerung der Genauigkeit erscheint wenig sinnvoll, zumal in den Rechenannahmen ("wirksame Stabsteifigkeiten", Arbeitslinien, Baustofffestigkeiten, Grenzdehnungen) größere Fehler in Kauf genommen werden mußten.

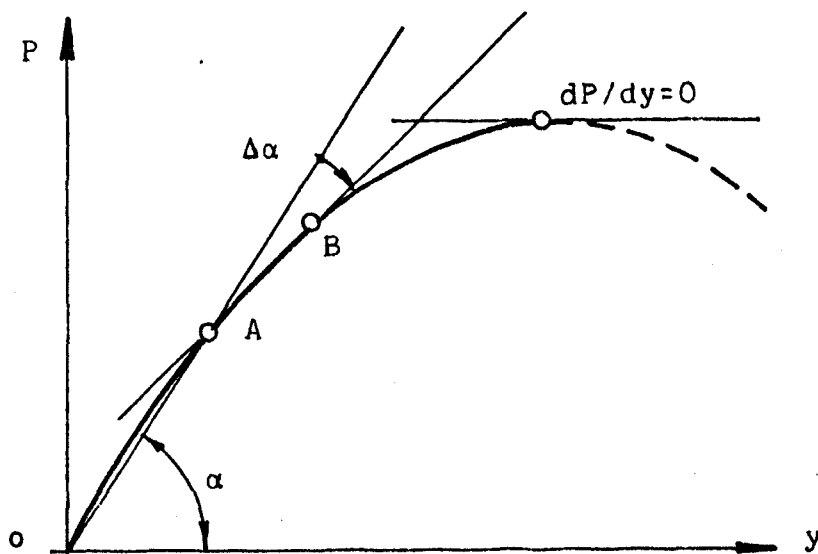


Bild 2.8 Steuerung der Laststeigerung

#### 2.4.5 Sonderfall: Unverschiebliches System

Das vorgelegte Rechenverfahren eignet sich für die Berechnung der Grenzlasten sowohl verschieblicher als auch unverschieblicher Stockwerkrahmen. Bei verschieblichen Systemen gilt Gl.(2.43), die bei unverschieblichen Systemen folgende Form annimmt:

$$\begin{bmatrix} -M_1^0 \\ \vdots \\ -M_i^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ -M_{n \cdot m}^0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n \cdot m} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Bei unverschieblichen Systemen können keine Knotenverschiebungen auftreten; es bleiben im Deformationsvektor lediglich die Knotenverdrehungen.

Die Auflösung der Gl.(2.43) bzw. (2.45) liefert immer eine eindeutige Lösung, da bei mechanisch sinnvollen Aufgaben die Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  nicht singular wird.

Die Besonderheiten beider Systemtypen werden im Detail in Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3 behandelt.

#### 2.4.6 Rechentechnische Probleme

Die Lösung des Traglastproblems von Stahlbeton-Stockwerkrahmen erfordert einen hohen Aufwand an Rechenkapazität und Rechenzeit. Versucht man, Verfahren wie in [6], [15] und [32] anzuwenden, so erschöpft sich die Kernspeicherkapazität auch einer Großanlage bei zunehmender Anzahl der Rahmenknoten schnell. Dies ist hauptsächlich auf zwei Gründe zurückzuführen:

- 1) Die Speicherung vorweg errechneter Momenten-Krümmungsbeziehungen nimmt viel Platz in Anspruch.

- 2) Rechnet man in diskreten Punkten der einzelnen Systemstäbe, und speichert man die zu diesen Punkten gehörigen Beanspruchungs-Verformungselemente, so erfordert das wieder - der Anzahl der Stäbe und deren Rechenpunkten entsprechend - viele Speicherplätze.

In der vorliegenden Arbeit ist - einerseits durch die Anwendung der Krümmungsfunktion nach Abschnitt 2.2.3, andererseits durch die Einführung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" - das Verformungsproblem auf eine elastizitätstheoretische Rechnung unter Anwendung konstanter Stabsteifigkeiten  $(EI)_w$  zurückgeführt worden. Damit ist eine einfachere, schematische, übersichtlichere Behandlung der Aufgabe möglich geworden. Gewisse rechentechnische Vorteile bietet außerdem die Tatsache, daß beim Errechnen der Stabsteifigkeiten mit den relativen Stabkoordinaten  $\xi = x/l$  gearbeitet werden kann. Bei jedem Stab werden in den Rechenpunkten  $\xi_1 \dots \xi_n$  die Beanspruchungen, die zugehörigen Krümmungen und Verformungen sowie anschließend die "wirksame Stabsteifigkeit" nacheinander errechnet, gespeichert wird jedoch nur die Größe  $(EI)_w$ . Die Ergebnisse der Zwischenpunktrechnungen können beim nächsten Stab überspeichert werden. So kann ohne größere Schwierigkeiten ein Rechenprogramm für 30 bis 40 Knoten - diese Größe umfaßt die Mehrzahl der praktischen Stahlbetonstockwerkrahmen - aufgestellt und das Problem des Zusammenwirkens des Gesamtsystems gelöst werden.

#### 2.4.7 Konvergenz der iterativen Berechnung der Systemverformungen

Die Frage der Konvergenz bei Iterationen läßt sich durch die Berechnung von Beispielen klären (siehe Abschnitt 3). Dabei ist einerseits die Arbeitsweise der Krümmungs-Subroutine, andererseits die Konvergenz des Verformungsvektors zu untersuchen.



1. Die Krümmungs-Subroutine nach Abschnitt 2.2.3 arbeitet unter Einhaltung einer Genauigkeitsschranke von 1 % - 1 ‰ zwischen vorgegebenen äußeren Kräften und errechneten inneren Schnittgrößen so, daß meist nach 3-5 Iterationsschritten die gesuchte Krümmung zur Verfügung steht. Nach Durchführung einer Anzahl von Traglastberechnungen (siehe [32] und Abschnitt 3) sowie Untersuchungen der Krümmungsfunktion  $K=f(N,M)$  in ihrem ganzen Definitionsbereich kann festgestellt werden, daß Konvergenzschwierigkeiten mit der Krümmungs-Subroutine bei üblichen Rahmen verhältnismäßig selten auftreten. Die Anzahl der Iterationsschritte der Krümmungsbestimmung wird bei jedem Rechengang abgefragt. Übersteigt sie 20, so gilt die Konvergenz als unzureichend. Dieser Fall kann z.B. in unmittelbarer Nähe eines Zugbruchzustandes - entsprechend dem Fließ-Ast der Stahlarbeitslinie - oder bei geringfügiger Momentenbeanspruchung mit Normalkraft auftreten. (Letzteres ist auf die ins Unendliche wandernde Nulllinie zurückzuführen). Beide Probleme lassen sich einfach beseitigen. Einerseits werden infolge feinerer Laststeuerung (siehe Abschnitt 2.4.4) im Bereich des Traglastzustandes die Probleme des Stahlfließens ausgeschaltet, andererseits kann durch geeignete Wahl der Genauigkeitsschranken der Konvergenzbereich für die praktischen Fälle erweitert werden.

2. Das zweite Konvergenzproblem tritt bei iterativer Bestimmung des Verformungsvektors nach Abschnitt 2.4.3 auf. Während der Laststeigerung können einzelne Rechenquerschnitte aus Zustand 1 in Zustand 2 übergehen und kurz vor Erreichen deren Grenztragfähigkeit in ein als Zustand 3 definiertes Stadium gelangen. Die Steifigkeiten in den einzelnen Zuständen weichen voneinander stark ab, d.h. der Übergang zwischen den Zuständen 1-2 bzw. 2-3 bedeutet Unstetigkeitsstellen in der Verformungsrechnung. Diese Unstetigkeiten können Konvergenzschwierigkeiten verursachen.

Da im vorliegenden Näherungsverfahren der zu untersuchende nichtlineare Verformungsbereich entsprechend der Definition der inelastischen Grenzlast gewissermaßen eingeschränkt ist, treten meist nur die Zustände 1-2 auf, der Zustand 3 lediglich in unmittelbarer Nähe des auf Materialbruch versagenden Querschnitts. Im Fall von Stabilitätsversagen ist ohnehin - wie in Abschnitt 2.2.5 erläutert - die Ausnutzung des Zustandes 3 nicht möglich. Diese Umstände und die Anwendung der integrierten "wirksamen Stabsteifigkeiten" beeinflussen die Konvergenz positiv. Nachteilig ist es jedoch, daß zwischen der so ermittelten rechnerischen Schnittkraftverteilung und der wirklichen gewisse Abweichungen auftreten können. Wie in Abschnitt 3.3 noch nachgewiesen wird, kann man sie im Rahmen der angestrebten Näherung für praktische Fälle hinnehmen.

Nach Durchführung einer Anzahl von Grenzlastberechnungen (siehe Abschnitt 3) läßt sich feststellen, daß Konvergenzprobleme beim vorliegenden Verfahren meist dort auftreten, wo bei einzelnen Stäben größere Stabbereiche von Zustand 1 in Zustand 2 übergehen. Dieses Problem ist so zu lösen, daß man die Anzahl der Iterationsschritte innerhalb einer Laststufe auf eine geeignete Größe (z.B. 4-5) begrenzt und im Falle ungenügender Konvergenz eine geringfügige Laststeigerung vornimmt. Infolge der veränderten Zahlenwerte des Beanspruchungs-Steifigkeits-Zustandes kann Konvergenz eintreten. Es kann auch durch Wiederholung des Rechenlaufs unter Anwendung stetiger feiner Laststeigerung Konvergenzabhilfe geschaffen werden. In solchen Fällen steigt jedoch die erforderliche Rechenzeit entsprechend der Anzahl der notwendigen Laststufen an.

In den meisten bisher untersuchten Fällen (Abschnitt 3) trat Konvergenz ein, und zwar entweder schon nach 1-5 Iterationsschritten innerhalb einer Laststufe oder

nach feiner Laststeigerung in der nächsten oder übernächsten Laststufe. Die Genauigkeitsschranke für den Verformungsvektor wurde  $\Delta \varphi_i = 10^{-6} \cdot l/d$  gesetzt, wobei  $l$  eine typische Stablänge bedeutet und damit eine näherungsweise, dem Verformungsverhalten entsprechende Kopplung der Verformungen und der Genauigkeitsschranke erreicht ist.

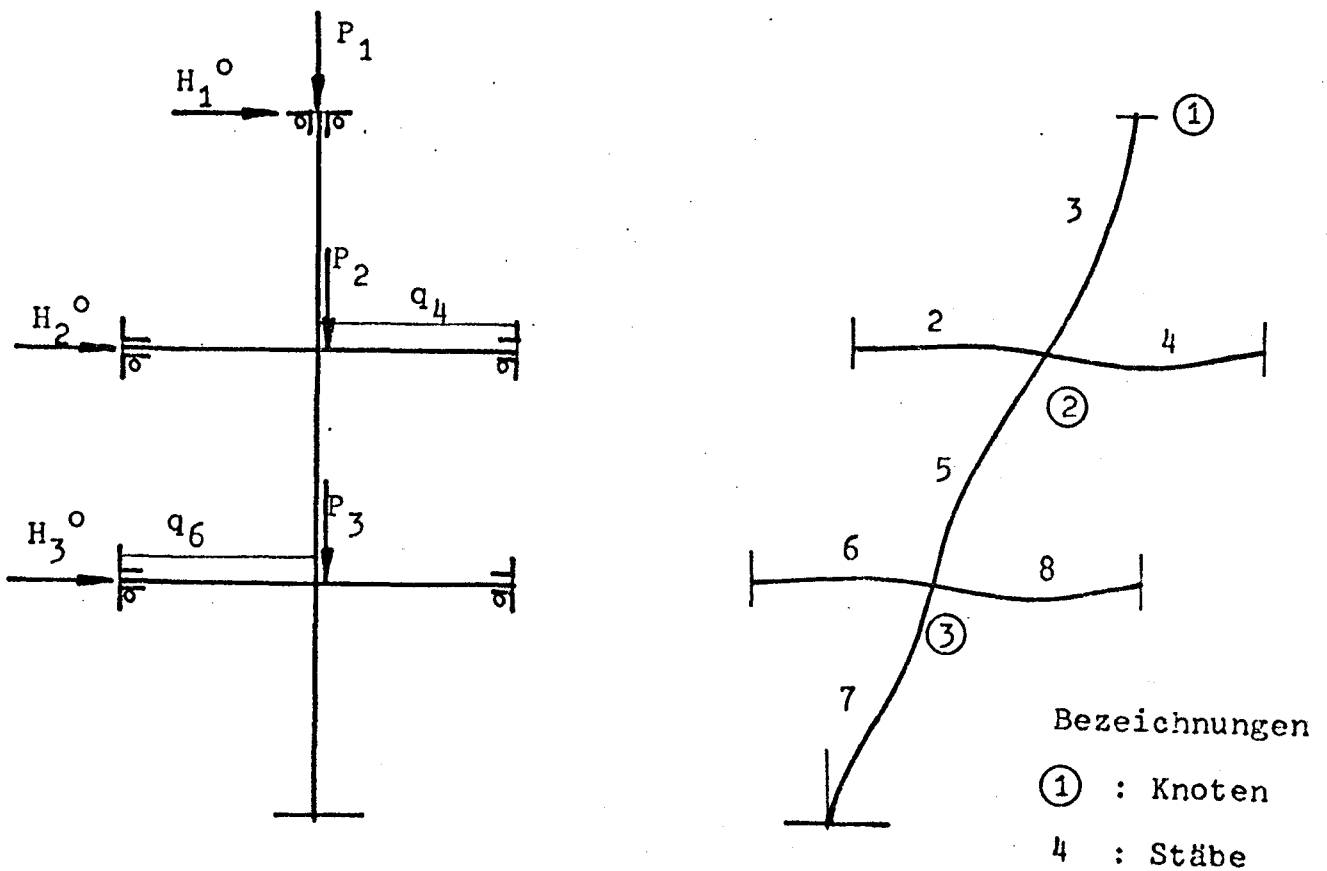
Ein weiteres Problem der Konvergenz ist, daß bei Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung verhältnismäßig große Verformungen auftreten, die nur mit Hilfe einer sehr feinen Laststeigerung verfolgt werden können. Dieses Vorgehen erhöht zwar die Rechenzeit, führt jedoch meist zum erwünschten Ergebnis.

Über die erforderlichen Rechenzeiten läßt sich wenig Allgemeines sagen. (Es sei lediglich für das typische Teilsystem nach Abschnitt 3 bemerkt, daß die Berechnung einer Laststufe auf der ICL 1907 - Rechenanlage der Technischen Universität Braunschweig (Kernspeicherkapazität 32K, Wortlänge 48 Bits) etwa 10 - 45 Sek. Rechenzeit nötig ist, und im allgemeinen genügen weniger als 20 Laststufen zur Bestimmung der betreffenden Rahmengrenzlast. Die Rechenzeit hängt von der System-Lastanordnung, von der Höhe der ersten Laststufe usw. ab.

### 3. Systematische Untersuchungen des Trag- und Verformungsverhaltens von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

### 3.1 Ein repräsentatives Teilsystem

Das erläuterte Rechenverfahren gilt für die in den Voraussetzungen (Abschnitt 2.1.2) eingeschränkten ebenen Stahlbetonrahmen. Im folgenden wird zunächst - um das grundsätzliche Tragverhalten solcher Rahmen zu klären, das hauptsächlich in der Interaktion zwischen Riegel und Stielen besteht - ein repräsentatives Teilsystem untersucht, dessen Verhalten dem des Gesamtsystems nahekommt.



**Bild 3.1** Repräsentatives Teilsystem und zugehöriges Verformungsbild bei Verschieblichkeit

Wählt man ein Teilsystem nach Bild 3.1, so können alle wesentlichen Einflußgrößen, wie System-Lastanordnung, Bewehrung usw., systematisch studiert werden. Das Teilsystem ist dreifach verschieblich, erfaßt die inelastische Endeinspannung der Druckstäbe durch die Biegestäbe und erlaubt, horizontale, vertikale Lasten sowie Querlasten für Riegel zu berücksichtigen. An den den Knoten abgelegenen Stabenden sind drehsteife, jedoch verschiebliche Lagerungsverhältnisse vorausgesetzt, die bei Bedarf auch auf gelenkige Lagerung umgeändert werden könnten.

### 3.1.1 Übertragung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 auf das Teilsystem

Nach den allgemeinen Bezeichnungen in Bild 2.1 wird im ausgewählten Teilsystem  $m = 1$  und  $n = 3$ . Damit ergibt sich die Anzahl der unbekannten Verformungskomponenten zu  $n_0 = 6$ . Die Gl.(2.42) nimmt folgende Form an:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{22} & \underline{K}_{21} & 0 \\ \underline{K}_{12} & \sum^2 \underline{K}_{11} + \sum^2 \underline{K}_{22} & \underline{K}_{21} \\ 0 & \underline{K}_{12} & \sum^2 \underline{K}_{11} + \sum^2 \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Nach Einsetzen von Gl.(2.31) in die Gl.(3.1) erhält man:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc} \frac{2C_3}{l_3^2} - \frac{P_3}{l_3} & -\frac{C_3}{l_3} \\ -\frac{C_3}{l_3} & A_3 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} -\frac{2C_3}{l_3^2} + \frac{P_3}{l_3} & -\frac{C_3}{l_3} \\ \frac{C_3}{l_3} & B_3 \end{array} \right] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left[ \begin{array}{cc} -\frac{2C_3}{l_3^2} + \frac{P_3}{l_3} & \frac{C_3}{l_3} \\ -\frac{C_3}{l_3} & B_3 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} \frac{2C_3}{l_3^2} - \frac{P_3}{l_3} + \frac{C_3}{l_3} - \frac{C_5}{l_5} & -\frac{2C_5}{l_5^2} + \frac{P_5}{l_5} - \frac{C_5}{l_5} \\ +\frac{2C_5}{l_5^2} - \frac{P_5}{l_5} & \frac{C_5}{l_5} \end{array} \right] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \left[ \begin{array}{cc} -\frac{2C_5}{l_5^2} + \frac{P_5}{l_5} & \frac{C_5}{l_5} \\ -\frac{C_5}{l_5} & B_5 \end{array} \right] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Die Gl.(3.2) lässt sich einfach, wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben, auf die der Gl.(2.43) entsprechende Form bringen, wobei auch die Stockwerk-Gleichgewichtsbedingung nach Gl.(2.41) erfüllt wird. So erhält man folgende Gleichung:

	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$-M_2^0$	$\Sigma A_2$	$B_5$	$-\frac{C_3}{l_3}$	$-\frac{C_5}{l_5}$	0	
$-M_3^0$	$B_5$	$\Sigma A_3$	0	$-\frac{C_5}{l_5}$	$-\frac{C_7}{l_7}$	
$H_1$	$\frac{C_3}{l_3}$	0	$\frac{2C_3}{l_3^2} - \frac{P_3}{l_3}$	0	0	(3.3)
$H_2$	$-\frac{C_5}{l_5}$	$-\frac{C_5}{l_5}$	0	$\frac{2C_5}{l_5^2} - \frac{P_5}{l_5}$	0	
$H_3$	0	$-\frac{C_7}{l_7}$	0	0	$\frac{2C_7}{l_7^2} - \frac{P_7}{l_7}$	

Die Auflösung der Gl.(3.3) wird durch Elimination der Verschiebungen vorgenommen:

$$y_1 = \frac{\varphi_2 \cdot C_3 \cdot l_3 + H_1 \cdot l_3^2}{2C_3 - P_3 \cdot l_3} \quad (3.4)$$

$$y_2 = \frac{\varphi_2 \cdot C_5 \cdot l_5 + \varphi_3 \cdot C_5 \cdot l_5 + H_2 \cdot l_5^2}{2C_5 - P_5 \cdot l_5} \quad (3.5)$$

$$y_3 = \frac{\varphi_3 \cdot C_7 \cdot l_7 + H_3 \cdot l_7^2}{2C_7 - P_7 \cdot l_7} \quad (3.6)$$

Das so auf die zwei unbekannten Knotenverdrehungen reduzierte Gleichungssystem nimmt dann aus den Gln.(3.3) bis (3.6) folgende Form an:

	$f_2$	$f_3$
$-M_2^0 + \frac{H_1 \cdot C_3^{\ell_3}}{2C_3 - P_3^{\ell_3}} + \frac{H_2 \cdot C_5^{\ell_5}}{2C_5 - P_5^{\ell_5}}$	$\sum_{k=2}^5 A_k - \frac{C_3^2}{2C_3 - P_3^{\ell_3}} - \frac{C_5^2}{2C_5 - P_5^{\ell_5}}$	$B_5 - \frac{C_5^2}{2C_5 - P_5^{\ell_5}}$
		(3.7)
$-M_3^0 + \frac{H_2 C_5^{\ell_5}}{2C_5 - P_5^{\ell_5}} + \frac{H_3 C_7^{\ell_7}}{2C_7 - P_7^{\ell_7}}$	$B_5 - \frac{C_5^2}{2C_5 - P_5^{\ell_5}}$	$\sum_{k=5}^8 A_k - \frac{C_5^2}{2C_5 - P_5^{\ell_5}} - \frac{C_7^2}{2C_7 - P_7^{\ell_7}}$

Schließlich seien die Koeffizienten der Gl.(3.7) gekürzt in folgende Form geschrieben:

$$\begin{aligned} \alpha_{20} &= \alpha_{11} \cdot f_2 + \alpha_{12} \cdot f_3 \\ \alpha_{30} &= \alpha_{21} \cdot f_2 + \alpha_{22} \cdot f_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Diskussion der Ergebnisse

Die Gl.(3.7) beschreibt den Beanspruchungs-Verformungs-zustand des repräsentativen Teilsystems nach Bild 3.1 für beliebige axiale ( $P_1, P_2, P_3$ ), horizontale ( $H_1, H_2, H_3$ ) Belastung sowie für Querbewehrung der Riegel ( $q_2, q_4, q_6, q_8$ ) im Sinne der Theorie II. Ordnung. Dabei bedeuten  $M_2^0, M_3^0$  die Knoten 2 und 3 angreifende Volleinspannmomente aus Riegelasten,  $H_1, H_2$  und  $H_3$  auf den oberen Stielanschnitt der Geschosse bezogene Geschoßquerkräfte. Die Steifigkeitswerte  $A_i, B_i$  und  $C_i$  sind in Gl.(2.23) definiert und für bekannte axiale Lasten und Stabsteifigkeiten bestimmbar. Die Auflösung des Gleichungssystems (3.8) erfolgt nach Abschnitt 2.4.3.



Der einfache Aufbau von (3.8) erleichtert das Studium der Grenzlast, im Grenzfall Knicklast vorliegender Art. Das inhomogene Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung, wenn es nicht singulär ist, also seine Koeffizientendeterminante ungleich Null ist ( $D \neq 0$ ).

Der homogene Teil des Gleichungssystems - entsprechend der mathematisch-mechanischen Abstraktion mittiger axialer Beanspruchung - ist dagegen aus der Bedingung, daß die Koeffizientendeterminante zu Null wird ( $D = 0$ ) lösbar. Die Anzahl der Lösungen entspricht der der Eigenwerte; für das Knickproblem hat jedoch lediglich die niedrigste Lösung eine Bedeutung.

### 3.1.3 Sonderfall: Stabknicken

Obwohl für Stahlbetonbauten ein reines Knickproblem nicht auftreten kann, da weder ein idealelastisches Material noch exakte mittige axiale Beanspruchung vorhanden ist (Herstellungsfehler), kann die Kenntnis des reinen Knickverhaltens eines Systems für die Anwendung von Näherungsmethoden (z.B. "Ersatzstabverfahren") von großem Nutzen sein. Eine befriedigende Behandlung der Stabilitätsprobleme von Stahlbetontragwerken kann zwar nur mit Hilfe von Verfahren durchgeführt werden, die dem beanspruchungsabhängigen, nichtlinearen Verformungsverhalten des Stahlbetons Rechnung tragen (z.B. das vorher erläuterte Verfahren); eine Vorausschätzung des möglichen Verformungsverhaltens kann jedoch manchmal mit Hilfe der Lösung des Knickproblems vorgenommen werden. Die Anwendbarkeit solcher Knickberechnungen erhöht sich, wenn die Stabsteifigkeiten im kritischen Zustand unter Berücksichtigung der Beanspruchungsabhängigkeit angesetzt werden können. Zu diesem Zweck ist ein Näherungsansatz in Abschnitt 3.4 angegeben. In der vorliegenden Arbeit werden grundsätzlich Verformungsrechnungen angestellt, deren Grenzfall, das Knickproblem, aber für Vergleichszwecke z.T. ebenso behandelt wird. Um den nahtlosen

Übergang zwischen Traglastproblem und Knickproblem zu verdeutlichen, werden die in Gl.(3.7) beinhalteten Ergebnisse für die Bestimmung einiger bekannter Knickwerte aus der Elastizitätstheorie angewandt. Dies gilt zugleich als Überprüfung der abgeleiteten Gleichungen. Es soll das Beispiel nach Bild 3.2 unter verschiedenen Randbedingungen (Einspanngrad und Verschieblichkeit) gelöst werden.

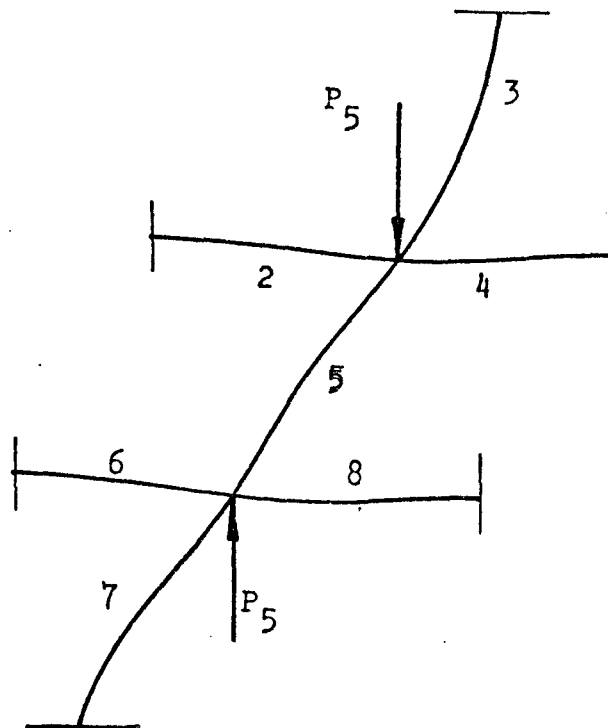


Bild 3.2 Knickproblem des Teilsystems

Die Knickbedingung lautet nach Gl.(3.8)

$$D = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} = 0 \quad (3.9)$$

Unter Berücksichtigung der besonderen Belastungsverhältnisse und nach Einsetzen der Steifigkeitswerte A, B und C sowie Umordnung in Gl.(3.9) wird diese zu:

$$(a_2 \cdot a_3 - a_2 \cdot a_7 - a_3 c_3) + k(a_2 + a_3)(\alpha - \gamma) - k(c_3 + c_7)\alpha + k^2(\alpha^2 - 2\alpha\gamma - (\beta - \gamma)^2) = 0 \quad (3.10)$$

Dabei bedeuten: (vgl. Abschnitt 2.3.2)

$$a_2 = 4 \left( \frac{EI_2}{l_2} + \frac{EI_3}{l_3} + \frac{EI_4}{l_4} \right)$$

$$a_3 = 4 \left( \frac{EI_6}{l_6} + \frac{EI_7}{l_7} + \frac{EI_8}{l_8} \right)$$

$$k = EI_5 / l_5$$

$$\alpha = (\epsilon \sin \epsilon - \epsilon^2 \cos \epsilon) / (2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon)$$

$$\beta = (\epsilon^2 - \epsilon \sin \epsilon) / (2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon)$$

$$\gamma = (\alpha + \beta)^2 / (2(\alpha + \beta) - \epsilon^2)$$

$$c_3 = 3 EI_3 / l_3$$

$$c_7 = 3 EI_7 / l_7$$

In Tafel 3.1 sind die Ergebnisse der Kontrollrechnungen über die Gln.(3.7) - (3.10) zusammengestellt, die den bekannten Lösungen des Stabknickens entsprechen.

Tafel 3.1 Sonderfälle: Lösungen des Stabknickens

Knickfall	Knickbedingung	Niedrigster $\beta_k = \pi/\epsilon$ Eigenwert	
Euler-Fall I	$\alpha - \gamma = 0 \rightarrow$ $(\sin \epsilon - \epsilon \cos \epsilon) \sin \epsilon - (1 - \cos \epsilon)^2 = 0$	$\epsilon = \frac{\pi}{2}$	2,0
Euler-Fall II	$(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \rightarrow$ $\sin \epsilon - \frac{\epsilon}{2}(1 + \cos \epsilon) = 0$	$\epsilon = \pi$	1,0
Euler-Fall III	$\alpha = 0 \rightarrow$ $\tan \epsilon - \epsilon = 0$	$\epsilon = \sqrt{2,046} \pi \approx 0,7$	
Euler-Fall IV	$\frac{1}{\alpha} = 0 \rightarrow$ $2(1 - \cos \epsilon) - \epsilon \sin \epsilon = 0$	$\epsilon = 2\pi$	$\frac{1}{2}$
beidseitig eingespannter ver-schieblicher Stab	$\frac{1}{\gamma} = 0 \rightarrow$ $\sin \epsilon = 0$	$\epsilon = \pi$	1,0

### 3.2 Berechnung von inelastischen Grenzlaster für den praktischen Bereich der Einflußgrößen

Bevor die einzelnen Berechnungsergebnisse erläutert werden, sei über die Auswahl der maßgebenden Einflußgrößen kurz berichtet. In der folgenden Tafel 3.2 wurden die wichtigsten Grenzlasterbeeinflussenden Parameter des Einzeldruckstabes denen des Rahmenstiels gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, daß Rahmensysteme infolge der großen Anzahl wesentlicher Einflußgrößen nicht so

einfach parametrisiert werden können wie ein Einzeldruckstab. Dem Verfasser erschien es daher wichtig, durch geeignete Wahl eines repräsentativen Teilsystems die Vielzahl der Parameter einzuschränken.

Tafel 3.2 Parameter der Rahmensysteme

Typ	Nr.	Bezeichnung	Rahmen- stiel	Einzeldruck- stab
Druckstäbe	1	Druckstabschlankheit	$h/d$	$h/d$
	2	Max. planmäßige Aus- mitte	$ e_2 $	$ e_2 $
	3	Verhältnis der End- ausmitten	$e_1/e_2$	$e_1/e_2$
	4	Mechanischer Beweh- rungsgrad	$\bar{\mu} = \mu \frac{\beta_S}{\beta_R}$	$\bar{\mu} = \mu \frac{\beta_S}{\beta_R}$
	5	Querschnittsform		
Biegestäbe	6	Biegestabschlankheit	$\ell/d$	---
	7	Max. Biegemoment	$ M_{\max} $	---
	8	Form der M-Fläche		---
	9	Mechanischer Beweh- rungsgrad	$\bar{\mu} = \mu \frac{\beta_S}{\beta_R}$	---
	10	Querschnittsform		---
Gesamt- system	11	Lastverteilung ) siehe ) Gln.	$\underline{p}$	---
	12	Steifigkeits- ) (2.43) verteilung    ) (2.44)	$\underline{K}$	---

Die Auswahl der zu untersuchenden Einflußgrößen erfolgt im folgenden nach dem Prinzip, daß nach Möglichkeit jeder Parameter der gegebenen System - Lastanordnung direkt

entnommen werden kann. (Elastizitätstheoretische Hilfsgrößen, wie z.B. Knicklängen, werden nur als Ergänzungen angegeben.)

### 3.2.1 Voruntersuchungen auf elastizitätstheoretischen Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden die systemabhängigen Einflußgrößen (11,12 nach Tafel 3.2) Last-und Steifigkeitsverteilung untersucht, um das Zusammenwirken der Stäbe bekannter Stabsteifigkeiten - vergl. Abschnitt 3.4 - näherungsweise zu studieren und um Vergleichswerte für die nachfolgenden Grenzlastberechnungen zu erhalten. Zwischen Verformungsverhalten eines Rahmensystems aus Stahlbeton und aus Idealbaustoff besteht der Unterschied im wesentlichen darin, daß dem System aus Idealbaustoff lastunabhängige, dem aus Stahlbeton jedoch lastabhängige Stabsteifigkeiten zuzuordnen sind. Setzt man die Stabsteifigkeiten eines Stahlbetonsystems als bekannt voraus - denn diese lassen sich in befriedigender Näherung nach Abschnitt 3.4 bestimmen - so kann man statt umfangreicher Grenzlastberechnungen (Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung) einfachere Knicklastuntersuchungen (Eigenwertbestimmung) anstellen, um Aufschlüsse über den Einfluß der wichtigsten Last-und Systemparameter auf die kritische Last des Systems zu gewinnen. Es sei jedoch betont, daß es sich hierbei nicht um die Vermischung zweier Probleme handelt, sondern um eine zweckmäßige Näherungsuntersuchung, mit der man vielfach zusammengesetzte Systeme rationeller erfassen kann. Die so errechneten Ergebnisse sollen in Verbindung mit den in Abschnitt 3.4 aus Grenzlastberechnungen abgeleiteten "wirksamen Stabsteifigkeiten" betrachtet werden.

Nachfolgend werden Knicklastuntersuchungen für einige typische Stockwerkrahmen errechnet, wobei der Einfluß folgender wichtigster Variablen studiert wird:

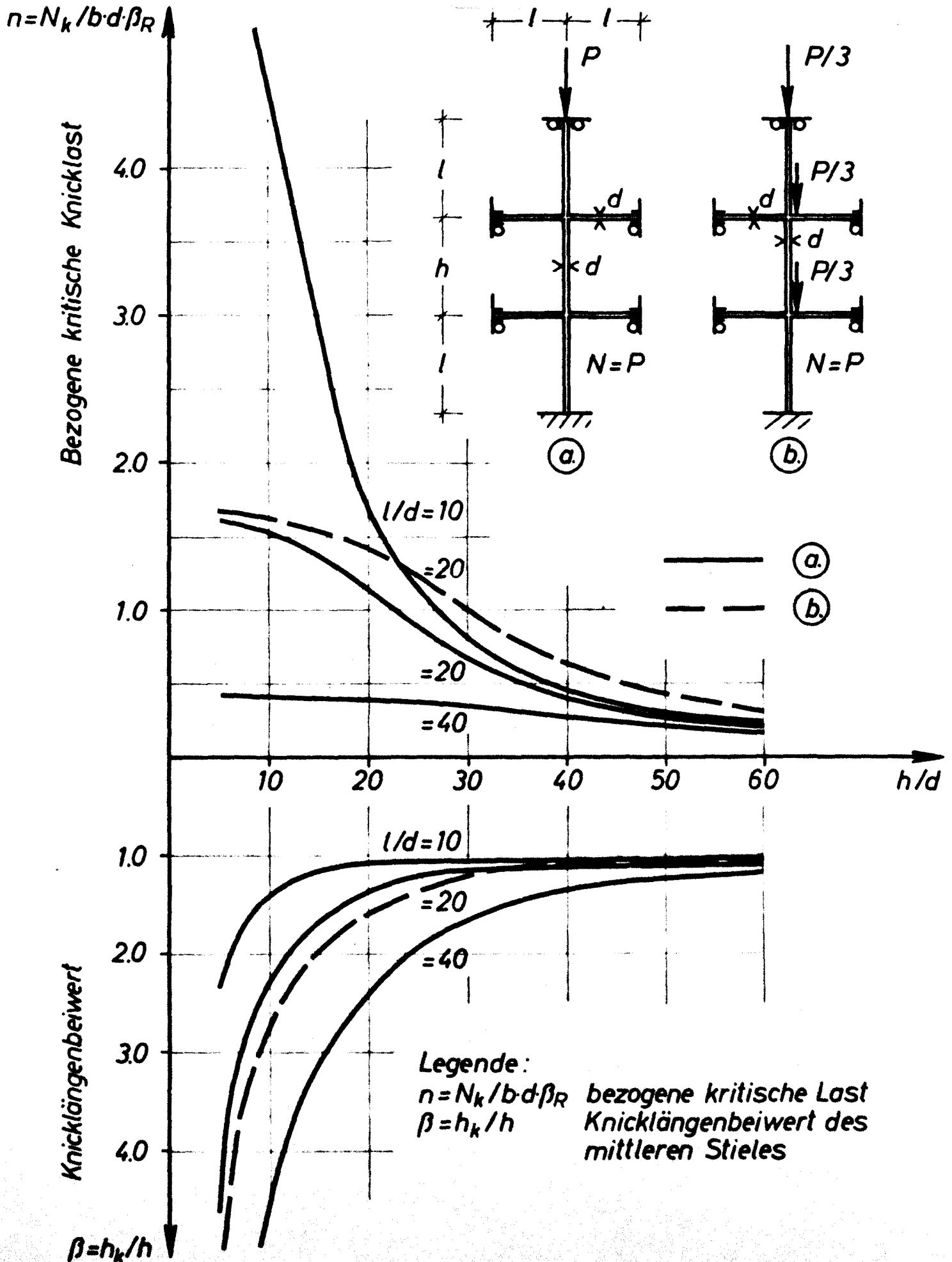
1. Knotensteifigkeitszahl:  $k = \frac{\sum EI_R / l}{\sum EI_S / h}$
2. Knotenlastverteilung im vertikalen Sinne  
(vergl. Bild 3.4 a,b)
3. Knotenlastverteilung im horizontalen Sinne  
(vergl. Bild 3.4 a,c)

Die Bestimmung der Knicklasten erfolgt numerisch in der Weise, daß der Wert der Determinante der Koeffizientenmatrix aus Gl.(2.43) unter steigender Belastung des Systems wiederholt errechnet wird, wobei zu dem ersten Nulldurchgang die niedrigste Knicklast gehört.

Auf Bild 3.3 ist ein Stockwerkrahmen mit den Ergebnissen seiner Knickuntersuchung dargestellt. Zur Verdeutlichung seien folgende Begriffe definiert:

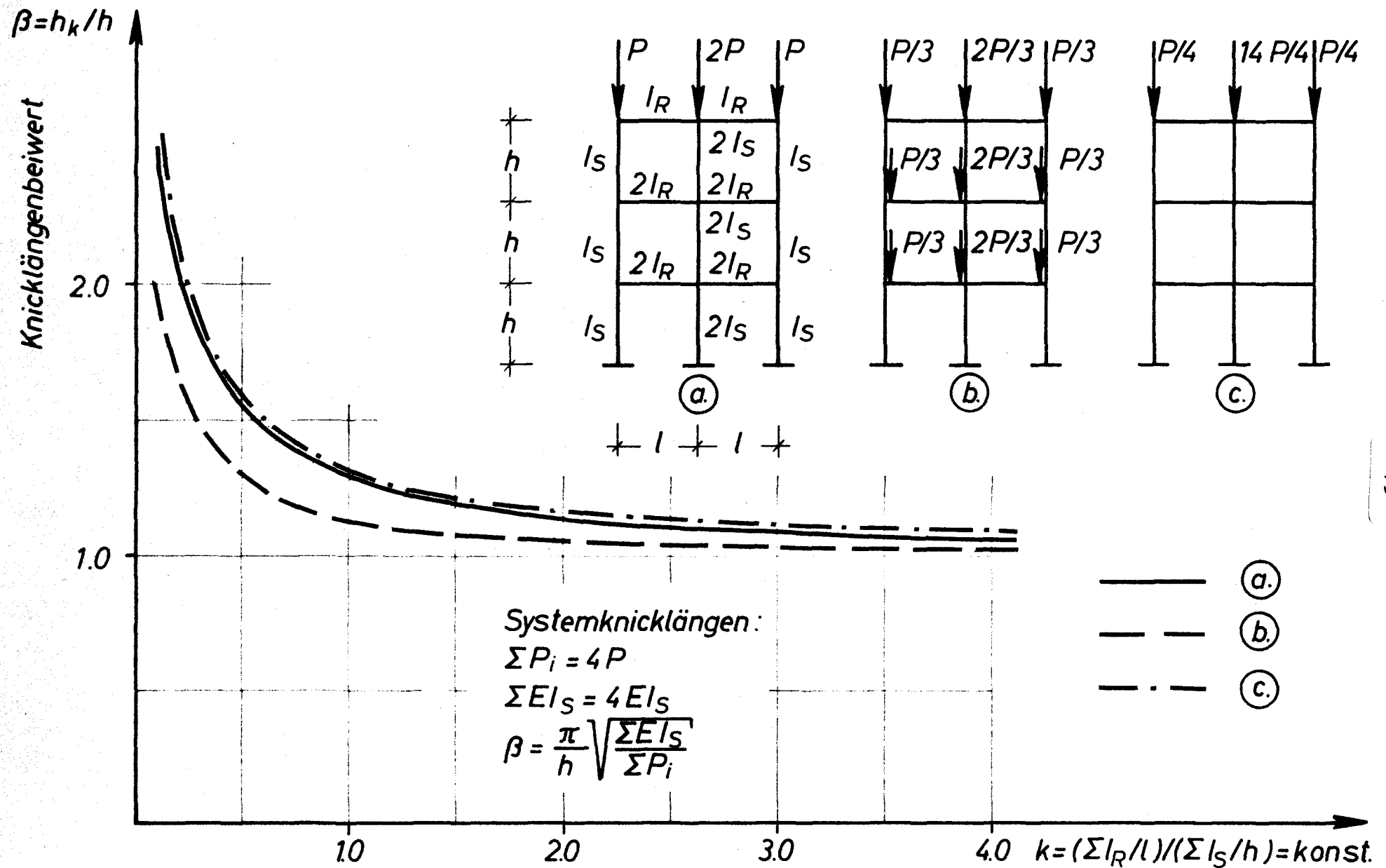
- 1) Systemknicklast ist die Verzweigungslast der gegebenen System-Lastanordnung, die als erster Eigenwert der Koeffizientenmatrix der Gl.(2.43) zu bestimmen ist.
- 2) Systemknicklänge ist eine Hilfsgröße, die aus der Systemknicklast in Verbindung mit dem Gesamtquerschnitt der Stiele des untersten Stockwerks analog zum Euler-Stab II definiert wird.
- 3) Knicklänge eines Stiels ist eine Hilfsgröße, die aus der Knicklast des Stiels in Verbindung mit dem eigenen Querschnitt analog zum Eulerstab II definiert wird.

Das Bild 3.3 zeigt den erheblichen Einfluß der Knotenlastverteilung im vertikalen Sinne auf die Systemknicklast. Die Knicklasten der beiden dargestellten System-Lastanordnungen unterscheiden sich im gesamten Bereich der variablen Knotensteifigkeitszahl  $k$  voneinander deutlich bis zu 35 %, auf den Fall b bezogen. Diese Tendenzen werden auch in Bild 3.4 an einem anderen



**Bild 3.3** Ideal-elastische Verzweigungslasten eines Teilsystems





**Bild 3.4 Ideal-elastische Systemknicklängen von Stockwerkrahmen.  
Einfluß der Last- und Steifigkeitsverteilung**

System erhärtet. Zwischen den vergleichbaren Systemknicklängen beider System-Lastanordnungen tritt ein Unterschied bis zu 30 % auf, der etwa 70 % in den Systemknicklasten bedeutet. Mit zunehmender Aussteifung reduziert sich dieser Wert auf etwa 25 %.

Der Einfluß der Knotenlastverteilung im horizontalen Sinne ist vernachlässigbar gering, wie dem Bild 3.4, Fall c, zu entnehmen ist. Weitere Einflüsse, wie die der Anzahl der Stockwerke und Felder, wurden von WAKABAYASHI in [56] studiert. Der Verfasser hat eine große Anzahl von Stockwerkrahmen zur Erhärtung der oben genannten Feststellungen untersucht, worüber an anderer Stelle berichtet wurde [34].

Bei Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse über das Knickverhalten von Stockwerkrahmen ist folgendes festzustellen:

- 1) Die Verteilung der Knotenlasten in vertikalem Sinne beeinflusst die Systemknicklast erheblich. Je höher der Lastschwerpunkt liegt, desto niedriger ist die Knicklast.
- 2) Der Einfluß der Aussteifung auf die Systemknicklast durch die Riegel ist bei Werten der Knotensteifigkeitszahl

$$k = (\Sigma I_R / l) / (\Sigma I_S / h) \leq 2,0$$

bedeutend. Oberhalb dieses Grenzwertes kann mit zunehmender Aussteifung die Knicklast kaum mehr beeinflusst werden.

### 3.2.2 Berechnung inelastischer Grenzlaster für unverschiebliche Systeme

Im folgenden Abschnitt wird das Trag- und Verformungsverhalten des unverschieblichen repräsentativen Teilsystems untersucht, um das Zusammenwirken der Riegel und Stiele zu studieren. Einige Beispiele an einem Einzelsystem (siehe Bild 3.5) - errechnet mit dem

strengeren Verfahren nach [32] - weisen auf die Möglichkeit großer Steifigkeits- und Schnittkraftumlagerungen unverschieblicher Systeme hin.

Ein Rahmensystem ist unverschieblich, wenn seine Knotenpunktkoordinaten im unverformten und verformten Zustand identisch bleiben. (Stablängsdehnungen werden vernachlässigt).

Der Beanspruchungs-Verformungszustand eines solchen Systems wird durch Gl.(2.45) beschrieben, die als Unbekannte lediglich die Knotenverdrehungen enthält. Der Verformungsvektor bestimmt die Form der Verformungsfigur. Die Form der Verformungsfigur beeinflusst maßgebend die Tragfähigkeit des Systems. Unter der Vielzahl möglicher Verformungsfigurtypen gibt es zwei markante Arten, die der oberen bzw. unteren Grenze der Tragfähigkeit des Systems zuzuordnen sind, nämlich:

- a) Verformungslinie mit einsinnig gekrümmten Stielen (ohne Wendepunkt), wobei für die Stielendausmitten und die Stielendverdrehungen jeweils folgende Gleichungen gelten:

$$e_1/e_2 = + 1,0$$

$$f_1 = f_2$$

- b) Verformungslinie mit gegenläufig gekrümmten Stielen (mit Wendepunkt), wobei analog zum Punkt a) folgende Definitionen gelten:

$$e_1/e_2 = - 1,0$$

$$f_1 = f_2$$

(Vergleichbar mit dem Fall a) ist ein statisch bestimmt gelagerter sogenannter "Standardstab" mit dem Fall b), ein sogenannter "Zimmermannsstab".)

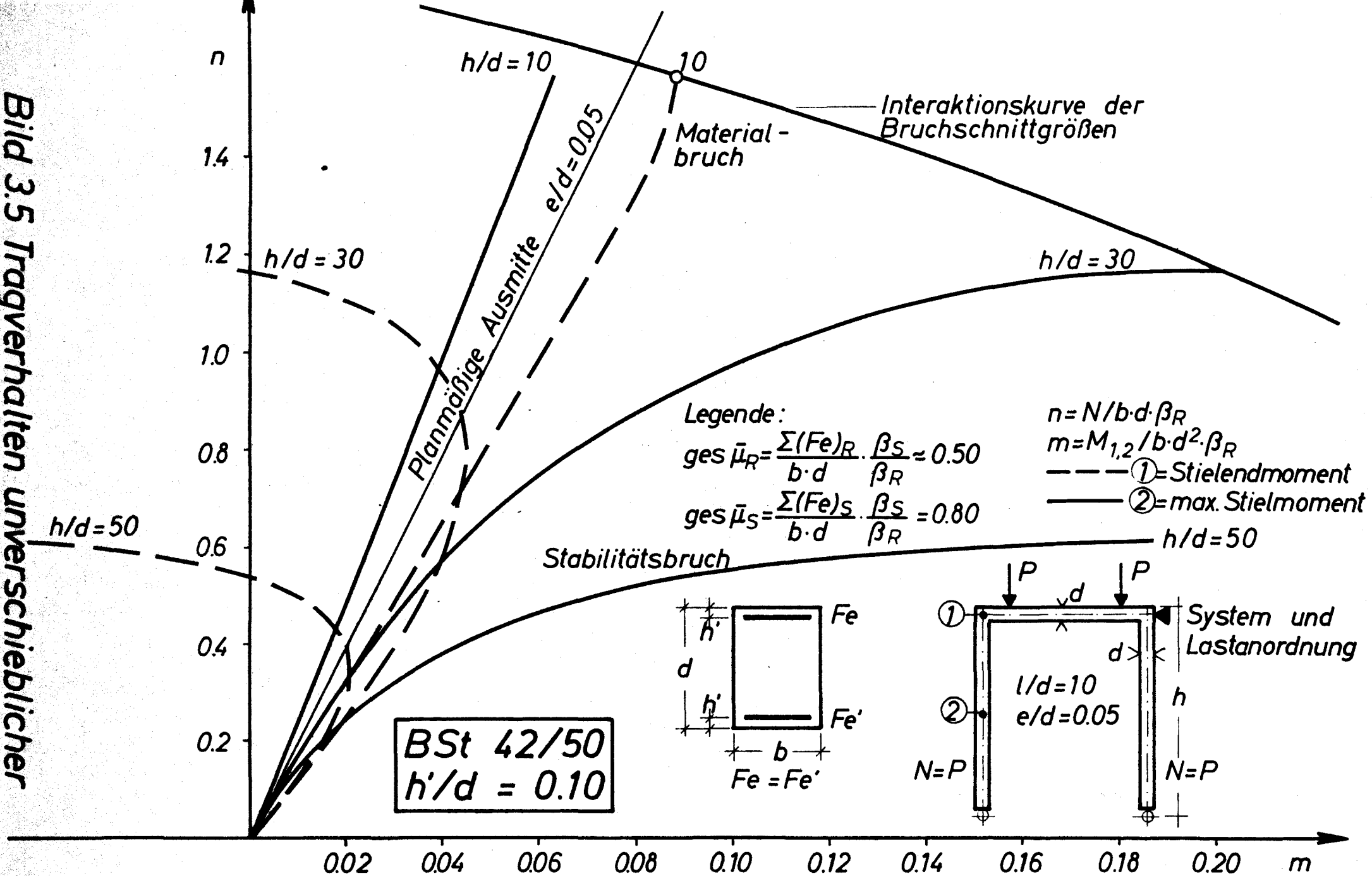
Im folgenden werden die beiden Grenzfälle a) und b) sowie einige dazwischen liegende Fälle der Stielbeanspruchung untersucht.

### 3.2.2.1 Systeme, bei denen die Stiele einsinnig gekrümmt sind

Das grundsätzliche Tragverhalten von Rahmensystemen mit einsinnig gekrümmten Stielen ist Bild 3.5 am Beispiel eines lotrecht am Riegel symmetrisch belasteten Zweigelenkrahmens zu entnehmen. (Hier werden nur einzelne, typische Ergebnisse einer vom Verfasser durchgeführten umfangreicheren Untersuchung dieses Systems mitgeteilt; siehe [32]. Die Rechenannahmen in [32] entsprechen denen nach Abschnitt 2.2.2 bis auf die Anwendung "wirksamer Stabsteifigkeiten". In [32] wurden nämlich in einer Anzahl von diskreten Rechenpunkten der Systemstäbe die Verträglichkeitsbedingungen am verformten System streng erfüllt.)

Das charakteristische Trag-und Verformungsverhalten der Stiele dieses Rahmentyps - repräsentativ für einsinnig gekrümmte Stiele allgemein - wurde in Form der bekannten Iterationsdarstellung in Bild 3.5 wiedergegeben. Typisch ist dabei der Sachverhalt, daß die Stielendmomente mit zunehmender axialer Belastung abnehmen, wogegen die Momente im mittleren Bereich des Stieles stark zunehmen können. Dieses Verhalten wird mit zunehmender Stielschlankheit  $h/d$  deutlicher. Die ausgewählten Beispiele zeigen, daß das Maß des "Abbaus" der Stielendmomente sehr groß sein kann. Im konkreten Fall erfolgt sogar ein Vorzeichenwechsel. Dabei sei betont, daß es sich durchaus um praxisnahe Parameterverhältnisse des Systems handelt. (Diese Aussage wird durch eine neuere Veröffentlichung von PAGAY, FERGUSON und BREEN bestätigt). [42]

Bild 3.5 Tragverhalten unverschieblicher  
Zweigelenkrahmen



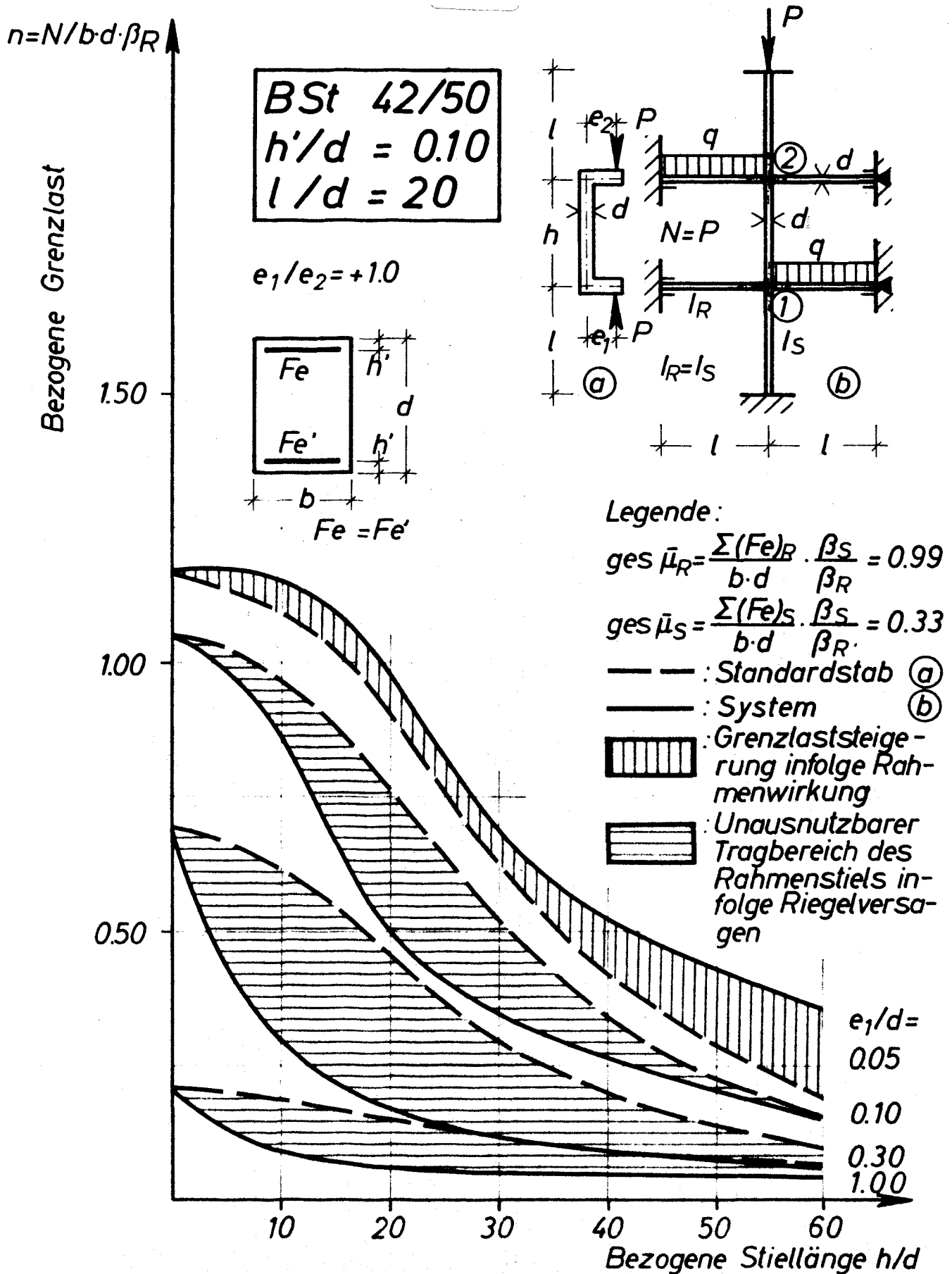
Dieses Verhalten hat folgende Konsequenzen:

- a) Das Tragverhalten eines Stahlbetonrahmens oben definierten Typs kann nicht genügend wirklichkeitsnah erfaßt werden ohne die Berücksichtigung der inelastischen einspannenden Wirkung der auf Biegung beanspruchten Riegel.
- b) Die Riegel müssen gegebenenfalls in der Lage sein, die volle Biegebeanspruchung unter statisch bestimmten Lagerungsverhältnissen - oder noch mehr - aufzunehmen.
- c) Sind die Bedingungen a) und b) nicht hinreichend erfüllt, so leidet entweder die Wirtschaftlichkeit (unausgenutzte Stiele) oder die Sicherheit (frühzeitiges Versagen der aussteifenden Riegel) des Systems.

In Bild 3.6 wird diese Aussage im weiten Bereich der möglichen Parameterkombinationen an dem repräsentativen Teilsystem bestätigt. Die waagerechte Schraffierung drückt die unausnutzbaren Stielkapazitäten aus. (Bei dem zahlenmäßigen Vergleich ist zu beachten, daß die planmäßige Ausmitte des Rahmenstiels verformungsabhängig abgebaut wird - siehe Bild 3.5 - , bei dem Standardstab jedoch nicht. Dies ist ein Mangel der direkten Vergleichbarkeit).

#### 3.2.2.2 Systeme, bei denen die Stiele gegenläufig gekrümmt sind

Tragsysteme dieser Art verdienen eine besondere Aufmerksamkeit aus praktischen Gründen. Sie sind im allgemeinen wenig stabilitätsgefährdet, da bei praktischen Stielschlankheiten die Verformungen verhältnismäßig gering bleiben. Diese Feststellungen sind in der einschlägigen Fachliteratur seit längerer Zeit bekannt, soweit sie sich auf Einzeldruckstäbe mit definierten bezogenen Längen (Schlankheiten) beziehen. Zur Klärung des Trag-



**Bild 3.6 Grenzlasten unverschieblicher Teilsysteme mit einsinnig gekrümmten schlanken Stielen**

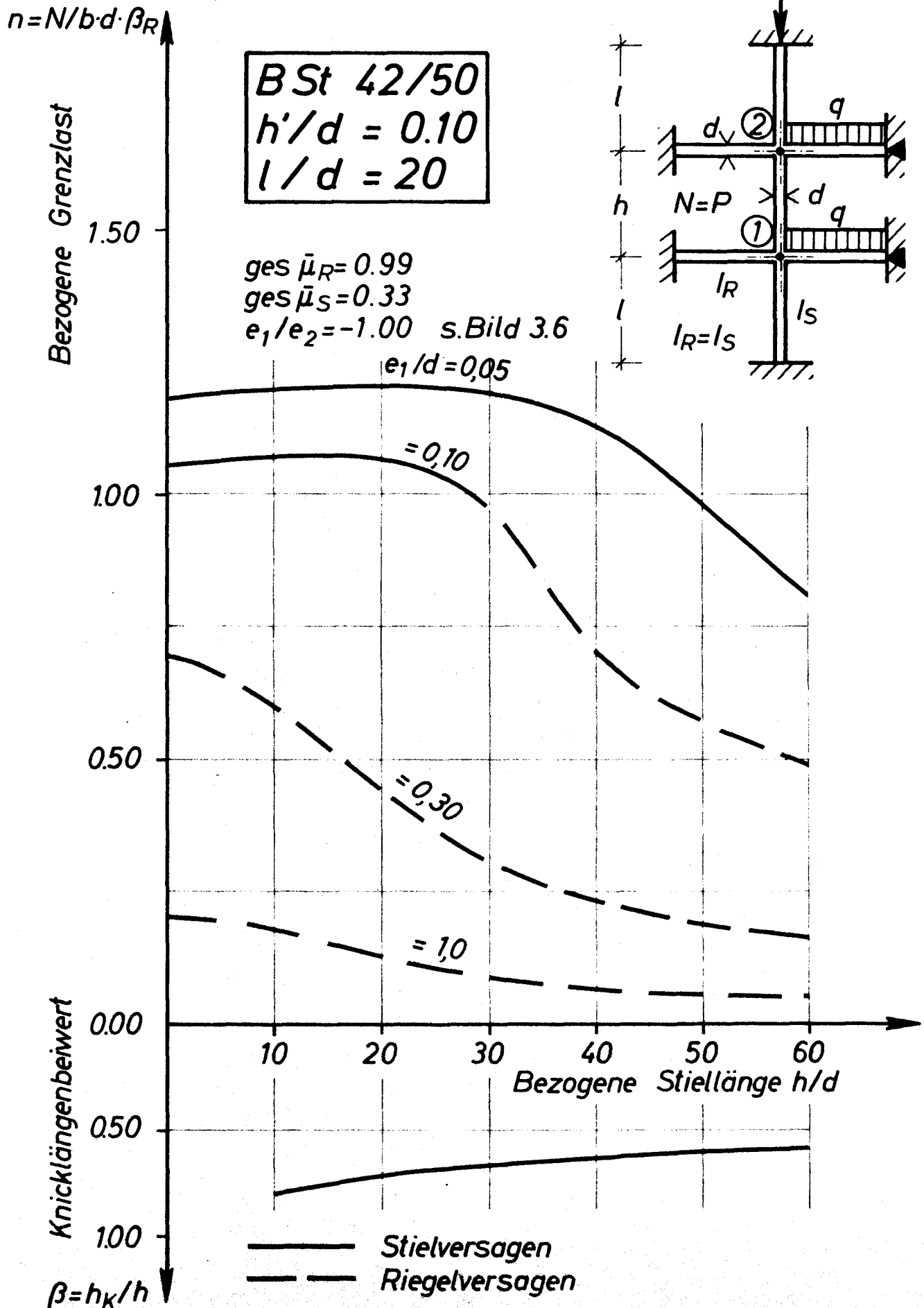
und Verformungsverhaltens von Rahmensystemen mit oben definierter Verformungsfigur der Stiele wurde eine größere Anzahl von Grenzlastberechnungen durchgeführt, deren Ergebnisse in den Bildern 3.7 - 3.10 wiedergegeben sind. Es wurde das unverschiebliche, repräsentative Teilsystem jeweils so belastet, daß dabei die gewünschte Verformungsfigur mit den entsprechenden planmäßigen Lastausmitten  $e/d$  entstand. Der Schlankheitseinfluß wurde mit Hilfe der variierten mittleren Stielschlankheit studiert. Die Einspannverhältnisse wurden sowohl hinsichtlich der Querschnittswerte als auch der Länge und Bewehrung der Riegel variiert. Es wurde angestrebt, nach Möglichkeit Stielversagen zu erzielen, womit die hohe Riegelbewehrung begründet ist. ( $\bar{\mu}_R = 0,988$ ). Unter den untersuchten Einflußgrößen ist auch charakteristisch der durch das Verhältnis  $e_1/e_2$  definierte Momentenverlauf entlang der Stiele.

Folgende Konsequenzen können aus den in den Bildern 3.7 - 3.10 dargestellten Ergebnissen gezogen werden:

- a) Die Grenzlasten werden durch die Schlankheit der Stiele nicht im gleichen Sinne und Maße beeinflusst wie bei einfach gekrümmten Stäben.
- b) Ist die Bewehrung der aussteifenden Riegel ausreichend, so können mit zunehmenden Stielschlankheiten beträchtliche Traglaststeigerungen erzielt werden, insbesondere im Bereich größerer planmäßiger Lastausmitten ( $e/d \geq 0,30$ )
- c) Es ist möglich, für praktische Zwecke eine Nachweisgrenze der Stielschlankheiten anzugeben, unterhalb der die einfache Biegebemessung den Stabilitätsnachweis ersetzen könnte:

$$h/d \leq 20$$





**Bild 3.7 Grenzlasten unverschieblicher Teilsysteme mit gegenläufig gekrümmten schlanken Stielen**

$n = N / b \cdot d \cdot \beta_R$

Bezogene Grenzlast

1.50

1.00

0.50

0.00

0.50

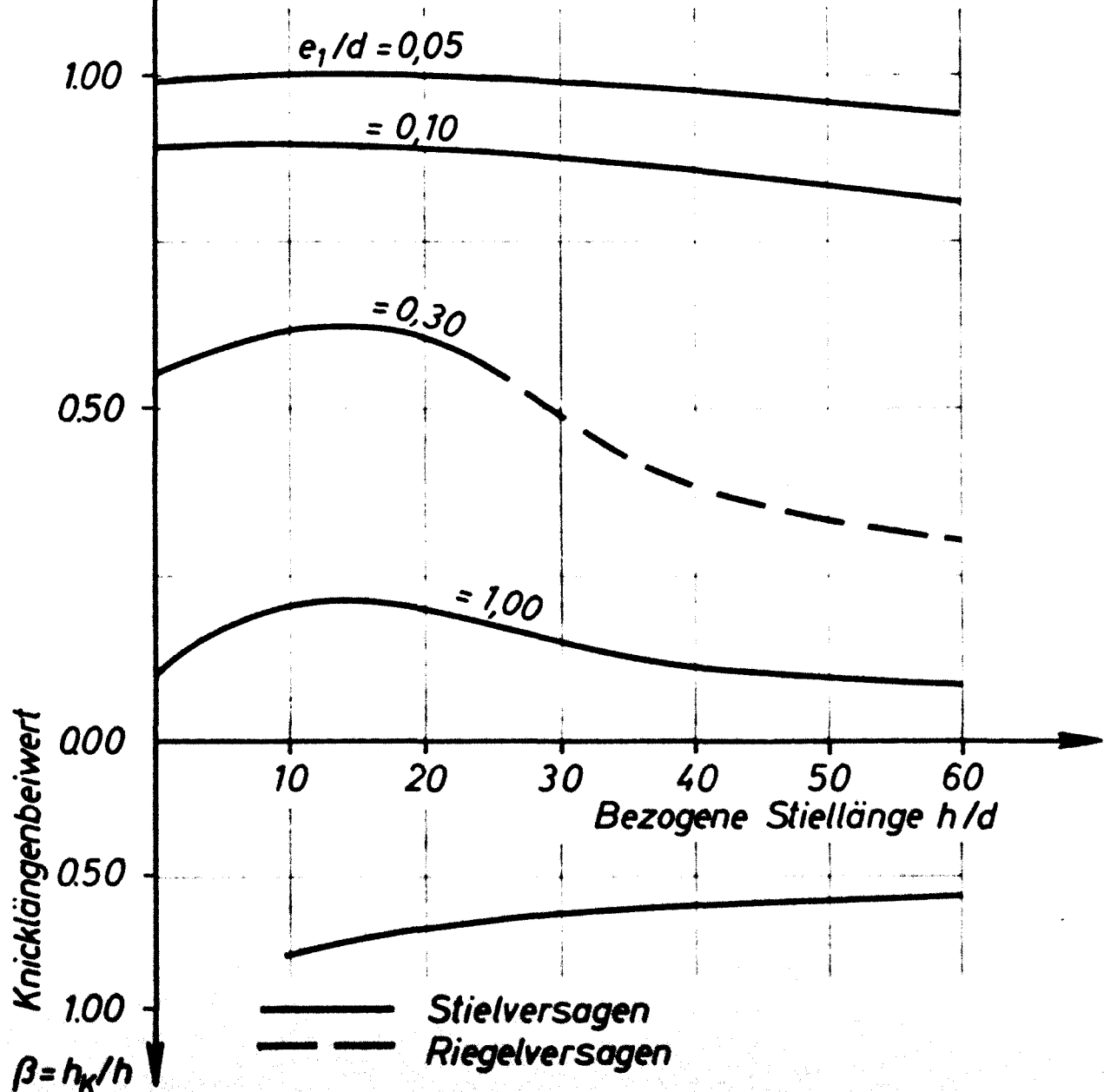
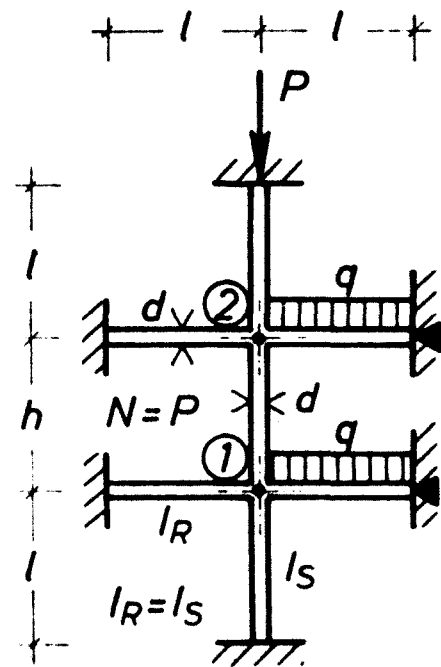
1.00

$\beta = h_K / h$

**BSt 42/50**  
 $h'/d = 0.10$   
 $l/d = 40$

ges  $\bar{\mu}_R = 0.99$   
 ges  $\bar{\mu}_S = 0.132$   
 $e_1/e_2 = -1.00$

s. Bild 3.6



**Bild 3.8 Grenzlasten unverschieblicher Teilsysteme mit gegenläufig gekrümmten schlanken Stielen**

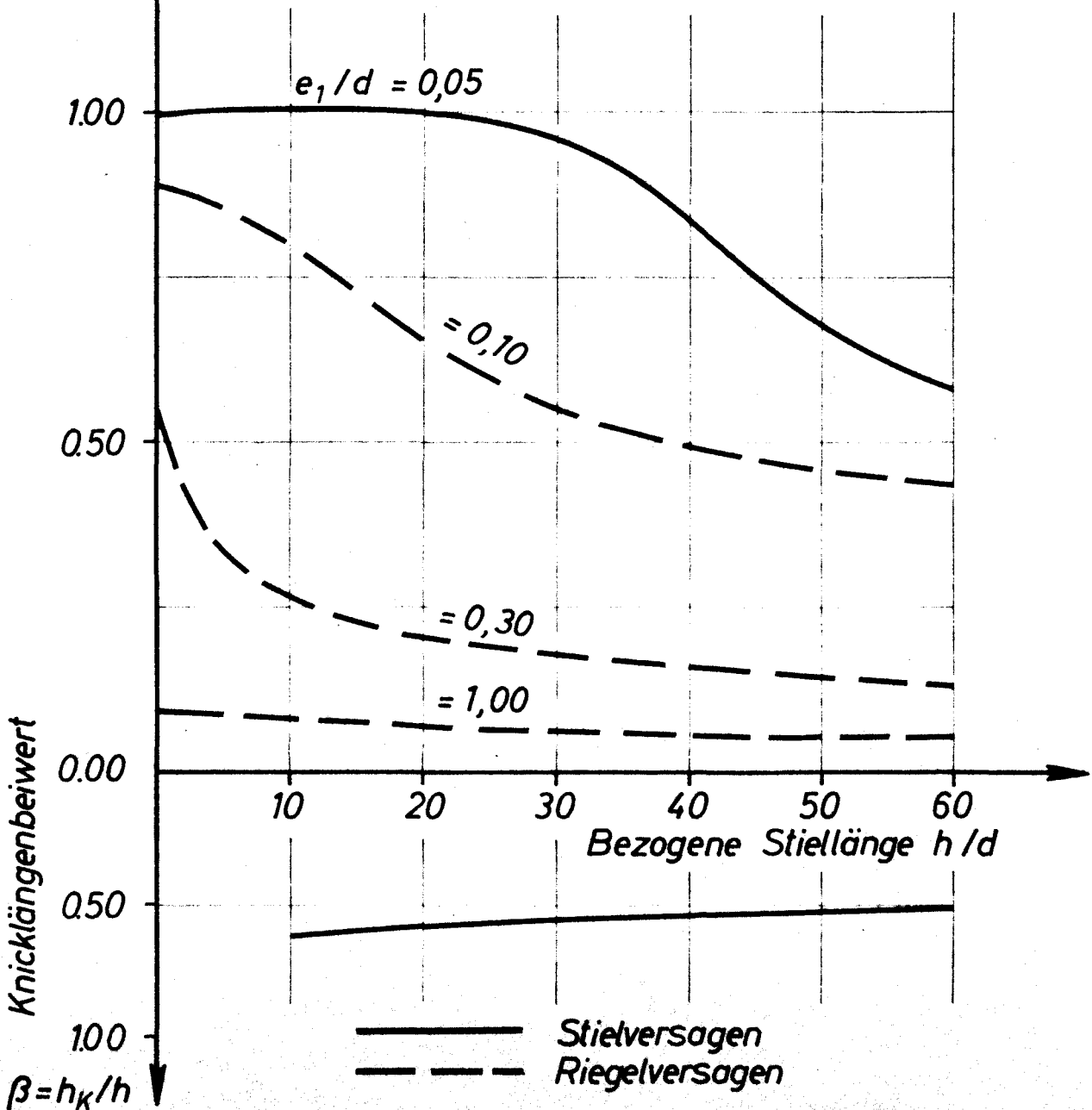
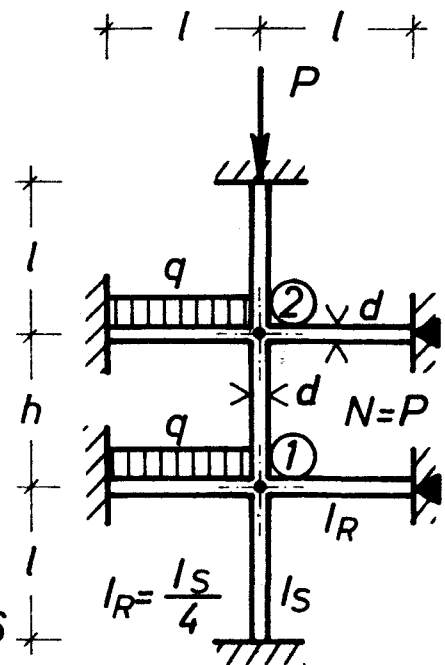
$$n = N / b \cdot d \cdot \beta_R$$

Bezogene Grenzlast

**BSt 42/50**  
 $h'/d = 0.10$   
 $l/d = 40$

ges  $\bar{\mu}_R = 0.99$   
 ges  $\bar{\mu}_S = 0.132$   
 $e_1/e_2 = -1.00$

s. Bild 3.6



**Bild 3.9 Grenzlasten unverschieblicher Teilsysteme mit gegenläufig gekrümmten schlanken Stielen**

$$n = N / b \cdot d \cdot \beta_R$$

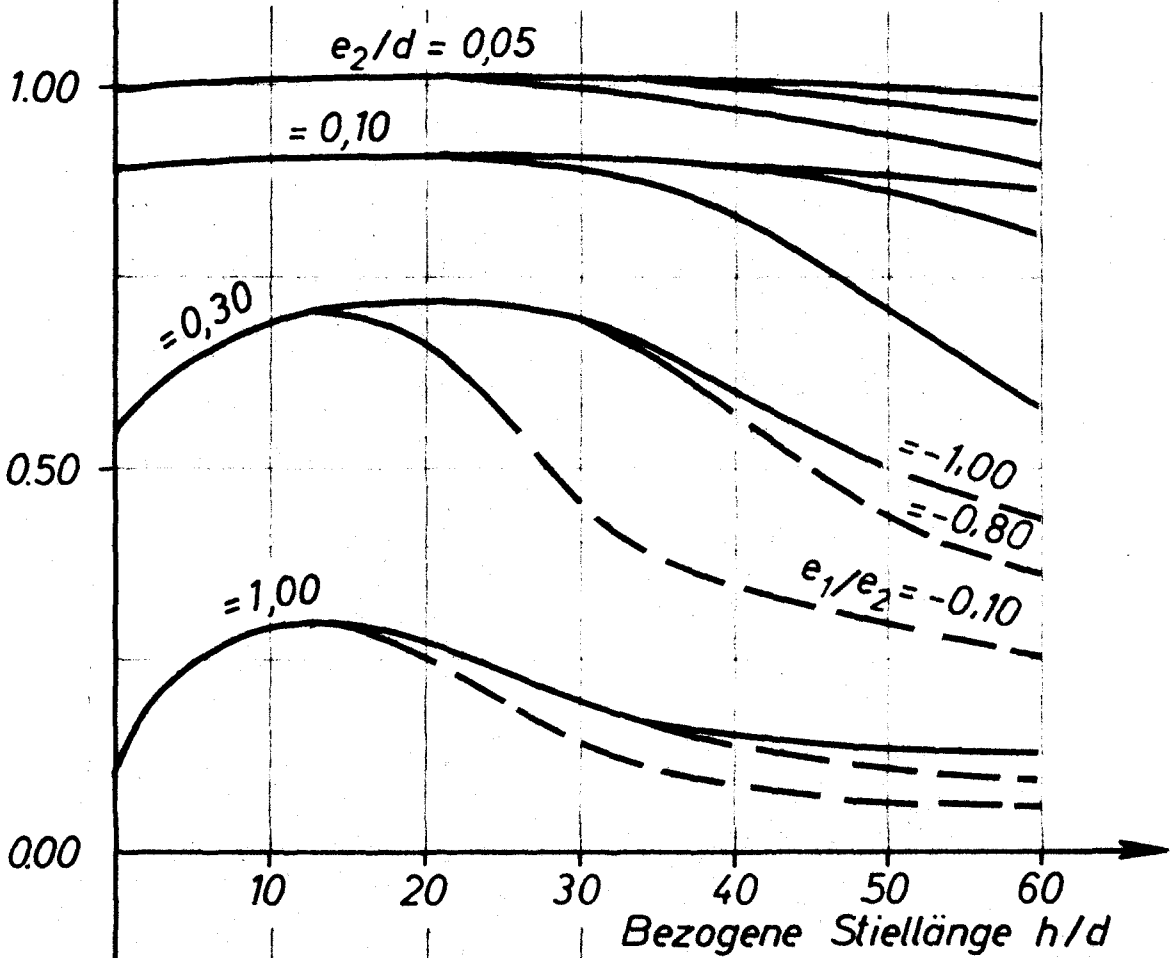
Bezogene Grenzlast

**BSt 42/50**  
 $h'/d = 0.10$   
 $l/d = 40$

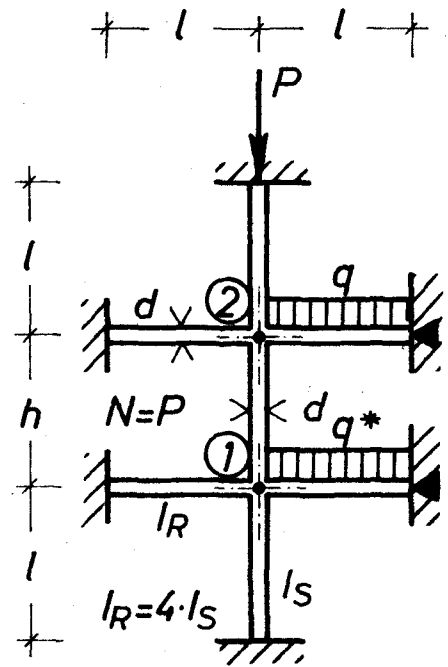
ges  $\bar{\mu}_R = 0.99$   
 ges  $\bar{\mu}_S = 0.132$   
 $e_1/e_2 = -1.00$   
 $= -0.80$   
 $= -0.10$

Knicklängenbeiwert

$$\beta = h_K / h$$



— Stielversagen  
 - - Riegelversagen



### 3.2.3 Berechnung inelastischer Grenzlasten für verschiebliche Systeme

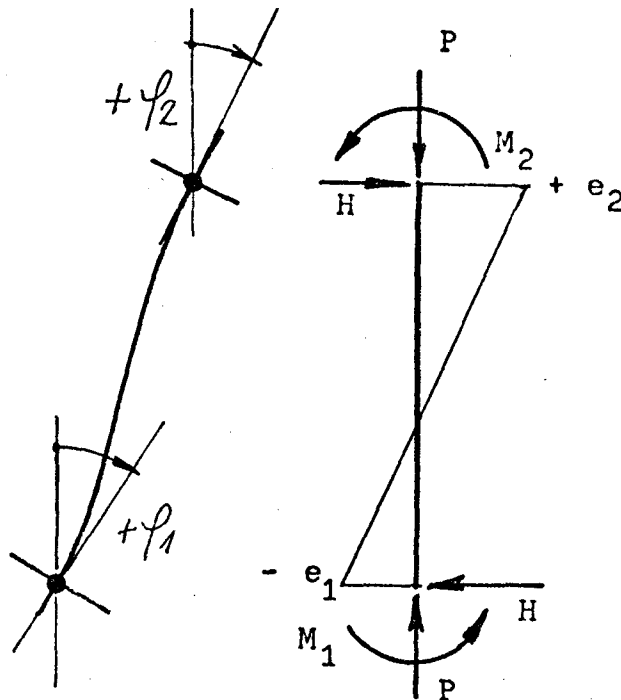
Nachstehend wird das Trag-und Verformungsverhalten des verschieblichen repräsentativen Teilsystems untersucht, um das Zusammenwirken der Riegel und Stiele zu studieren. Einige Beispiele (siehe Bild 3.13) werden an einem Einfeldsystem strenger nach [32] errechnet, um Vergleiche zur Genauigkeitsüberprüfung des Verfahrens nach Abschnitt 2 zu erhalten.

Ein Rahmensystem ist verschieblich, wenn seine Knotenpunktkoordinaten im unverformten und verformten Zustand nicht identisch sind. (Stablängsdehnungen werden hierbei vernachlässigt.) Verschiebliche Stockwerkrahmen - unter Beachtung der Einschränkungen in Abschnitt 2.1.2- haben die Eigenschaft, daß während der Verschiebung immer nur eine der einzelnen Knotenpunktkoordinaten ihren Wert ändert. Im lotrecht-waagerechten Koordinatensystem bedeutet dies, daß die Knotenpunkte bei gleichbleibender Höhe lediglich waagerechte Auslenkungen erleiden.

Der Beanspruchungs-Verformungszustand im Sinne der Theorie II. Ordnung wird für solche Systeme durch die Gl.(2.43) bzw. im vorliegenden speziellen Fall des repräsentativen Teilsystems durch die Gln.(3.3) und (3.7) beschrieben. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Verformungsfigur, bestimmt durch die Vektoren  $\underline{f}$  und  $\underline{y}$ . Der Charakter dieser Verformungsfigur ist durch die Lastanordnung vorausbestimmbar. Beim Vorhandensein waagerechter Lasten gelten folgende Gleichungen, die die Verformungsfigur und den Momentenverlauf der Rahmenstiele beschreiben:

$$\text{signum } e_1 = - \text{signum } e_2$$

$$\text{signum } f_1 = \text{signum } f_2$$

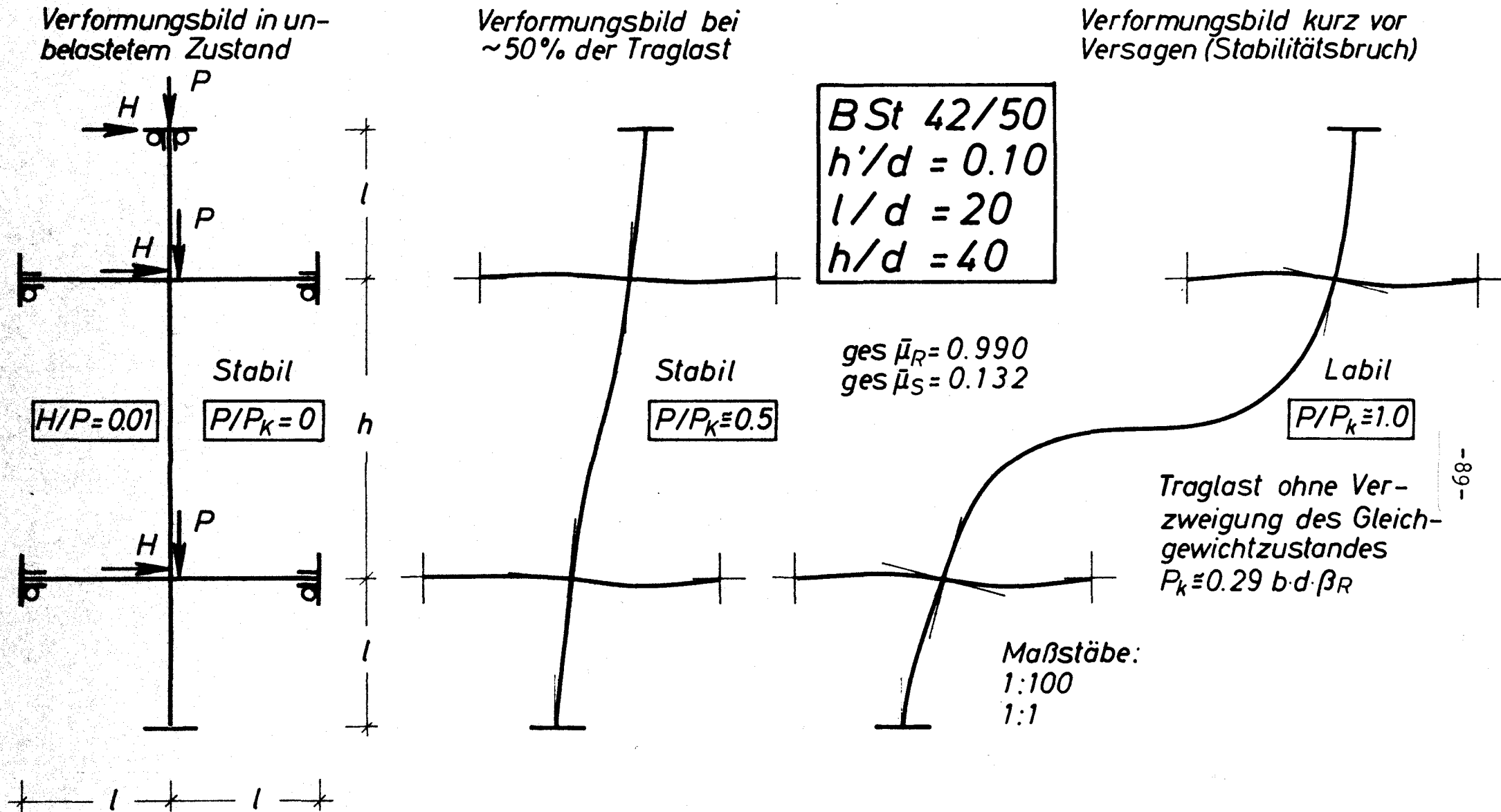


**Bild 3.11** Beanspruchungen und Verformungen eines verschieblichen Rahmenstiels

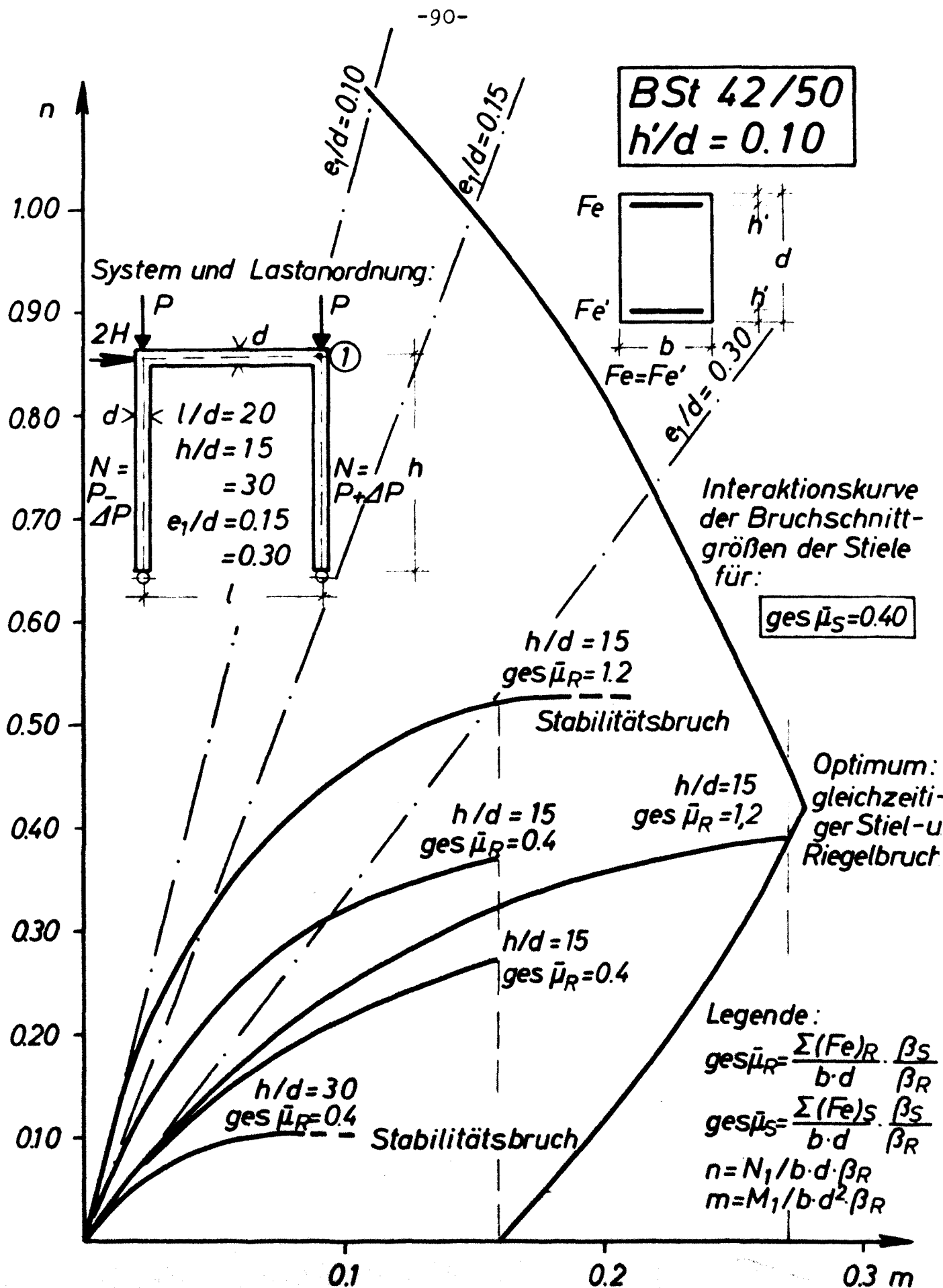
Die beiden voneinander abhängigen Gleichungen bedeuten geometrisch, daß die Verformungsfigur der Rahmenstiele in den meisten Fällen einen Wendepunkt je Geschoß besitzt, dessen Lage in erster Näherung durch das Verhältnis  $e_1/e_2$  bestimmbar ist. Im folgenden werden anhand von Grenzlastrechnungen die Eigenschaften verschieblicher Stahlbetonrahmen näher untersucht.

### 3.2.3.1 Nichtlineares Verformungsverhalten und inelastische Einspannung verschieblicher Rahmenstiele

In Bild 3.12 wird das Verformungsbild des Teilsystems unter horizontaler und vertikaler Beanspruchung in drei verschiedenen Laststufen dargestellt. Die der Berechnung zugrunde gelegten Parameter sind dem Bild zu entnehmen. Es wurde geringe Stielbewehrung ( $\bar{\mu}_s = \bar{\mu}'_s = 0,066$ ), starke Riegelbewehrung ( $\bar{\mu}_R = \bar{\mu}'_R = 0,495$ ), mittlere planmäßige Ausmitte ( $e/d = 0,24$ ) und große Stielschlankheit im mittleren Stockwerk ( $h/d = 40$ ) bei der Berechnung des Beispiels angenommen. Die errechneten Verformungsfiguren zeigen, daß zwischen Belastungen und Verformungen eine weitgehend nichtlineare Beziehung besteht. Ein annähernd lineares Verhalten kann lediglich bis

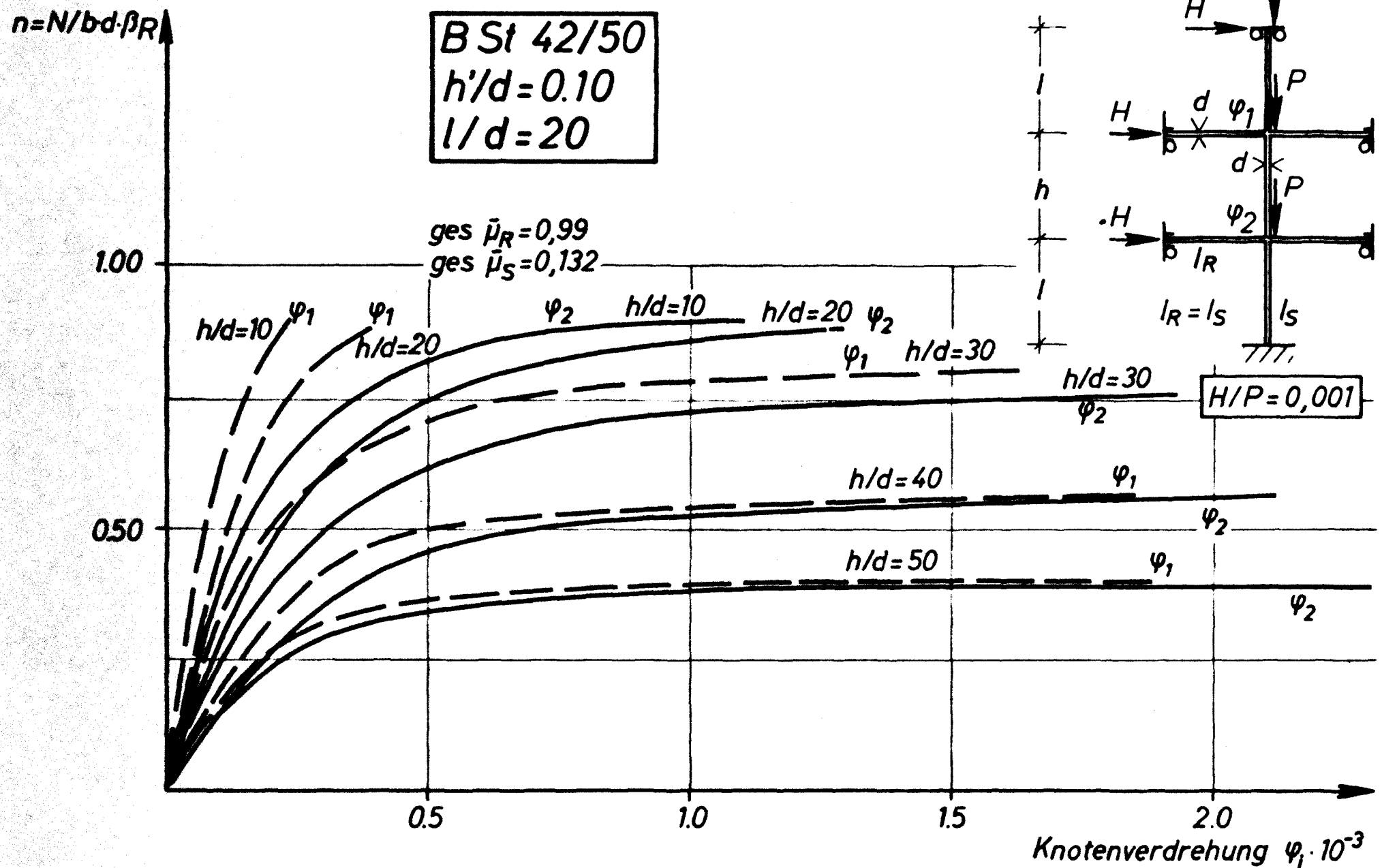


**Bild 3.12** Verformungsbild des verschieblichen Teilsystems unter steigender Belastung



**Bild 3.13** Tragverhalten verschieblicher Zweigelenkrahmen (strengeres Verfahren [32])





**Bild 3.14 Nichtlineare Last-Verformungsbeziehungen verschieblicher Stahl-betonrahmen**

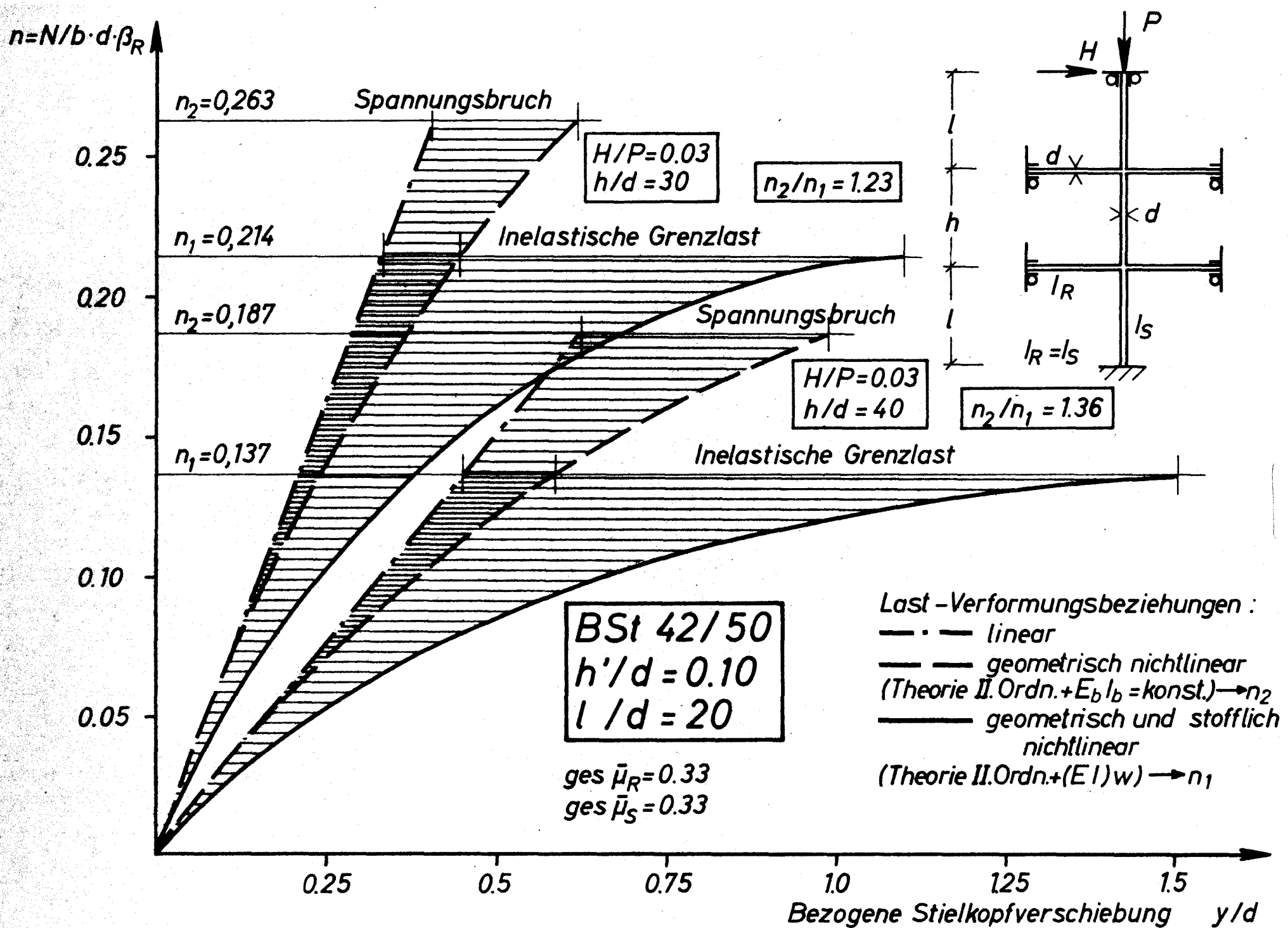
etwa 50 % der Traglast festgestellt werden.

In Bild 3.13 werden nach dem strengerem Verfahren[32] errechnete Beispiele dargestellt. Die variierten Parameter umfassen den Bereich mittlerer bis großer Stielschlankheiten ( $h/d = 15-30$ ), mittlerer bis großer Riegelbewehrungen ( $\text{ges}\bar{\mu}_R = 0,4-1,20$ ), kleiner bis mittlerer Stielausmitten ( $e/d = 0,1-0,3$ ) und einer mittleren Stielbewehrung ( $\text{ges}\bar{\mu}_s = 0,4$ ). Der bekannten Interaktionsdarstellung können die nichtlineare Entwicklung der Stabendmomente unter steigender Belastung und verschiedene Versagensursachen entnommen werden. Deutlich ist die stabilisierende, die Systemtragfähigkeit steigende Rolle der Riegelbewehrung zu erkennen (siehe auch 3.2.3.3).

An weiteren in Bild 3.14 dargestellten Beispielen wird der markante Einfluß der bezogenen Stielschlankheit auf die Knotenverdrehungen des Systems sichtbar. Es ist auch deutlich zu erkennen, daß ein durch die waagrecht werdende Tangente des Last-Verformungsdiagramms (hier:  $d n / d \varphi \rightarrow 0$ ) gekennzeichnetes Stabilitätsversagen schon im Bereich mittlerer Stabschlankheiten ( $h/d = 20 - 30$ ) auftreten kann.

Bei den in den Bildern 3.12 - 3.14 dargestellten Beispielen sind sowohl die geometrischen als auch die materialmäßigen Nichtlinearitäten der Stahlbetonsysteme in Rechnung gestellt worden. Um die Größe des Anteils, der aus dem Werkstoffgesetz herrührt, ermitteln zu können, wurden einige Grenzlastrechnungen mit konstanter, lastunabhängiger Stabsteifigkeit durchgeführt.

Zur Bestimmung der Stabsteifigkeiten wurde der Ursprungsmodul der Arbeitslinie des Betons ( $E_b = 1000 \cdot \beta_R \text{ Mp/m}^2$ ) und die Steifigkeit der unbewehrten, ungerissenen Stabquerschnitte ( $I_b$ ) in Rechnung gestellt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Bild 3.15 dargestellt.

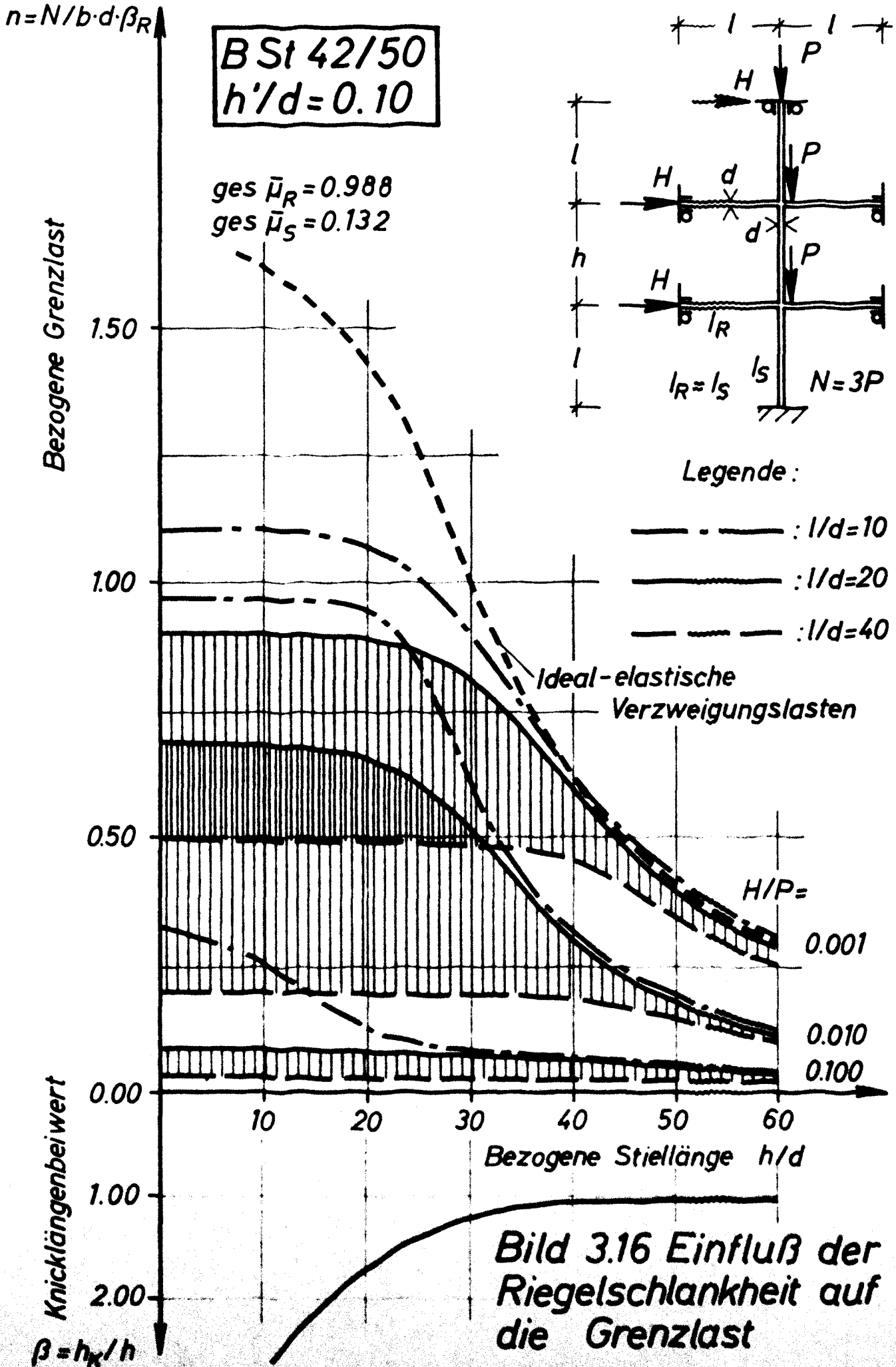


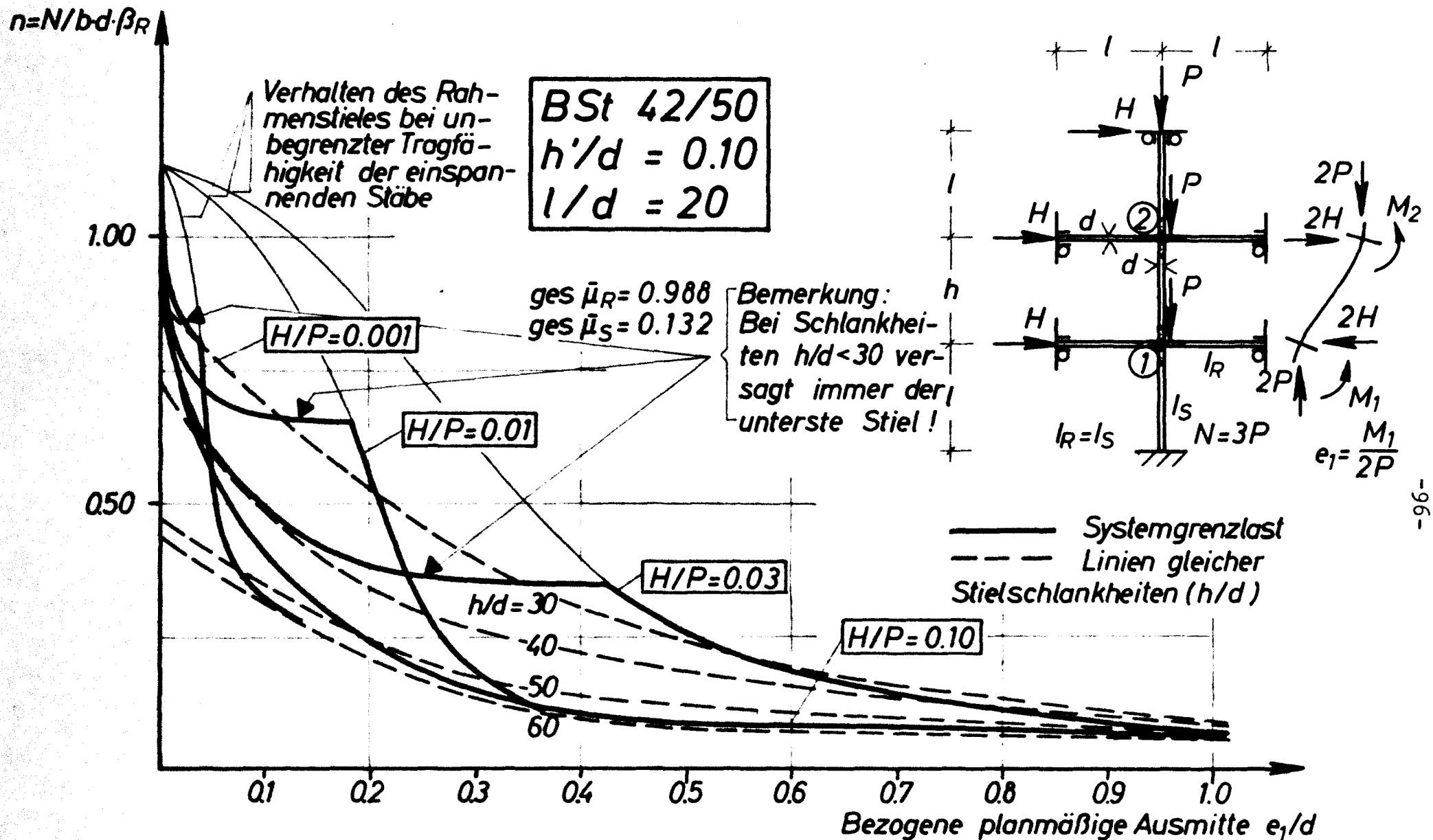
**Bild 3.15 Geometrische und stoffliche Nichtlinearität**

Das Bild zeigt, daß bei Außerachtlassung der Nicht-linearität des Stoffgesetzes und des Aufreißens der Querschnitte eine Überschätzung der Grenzlast bis zu 40 % eintreten kann.

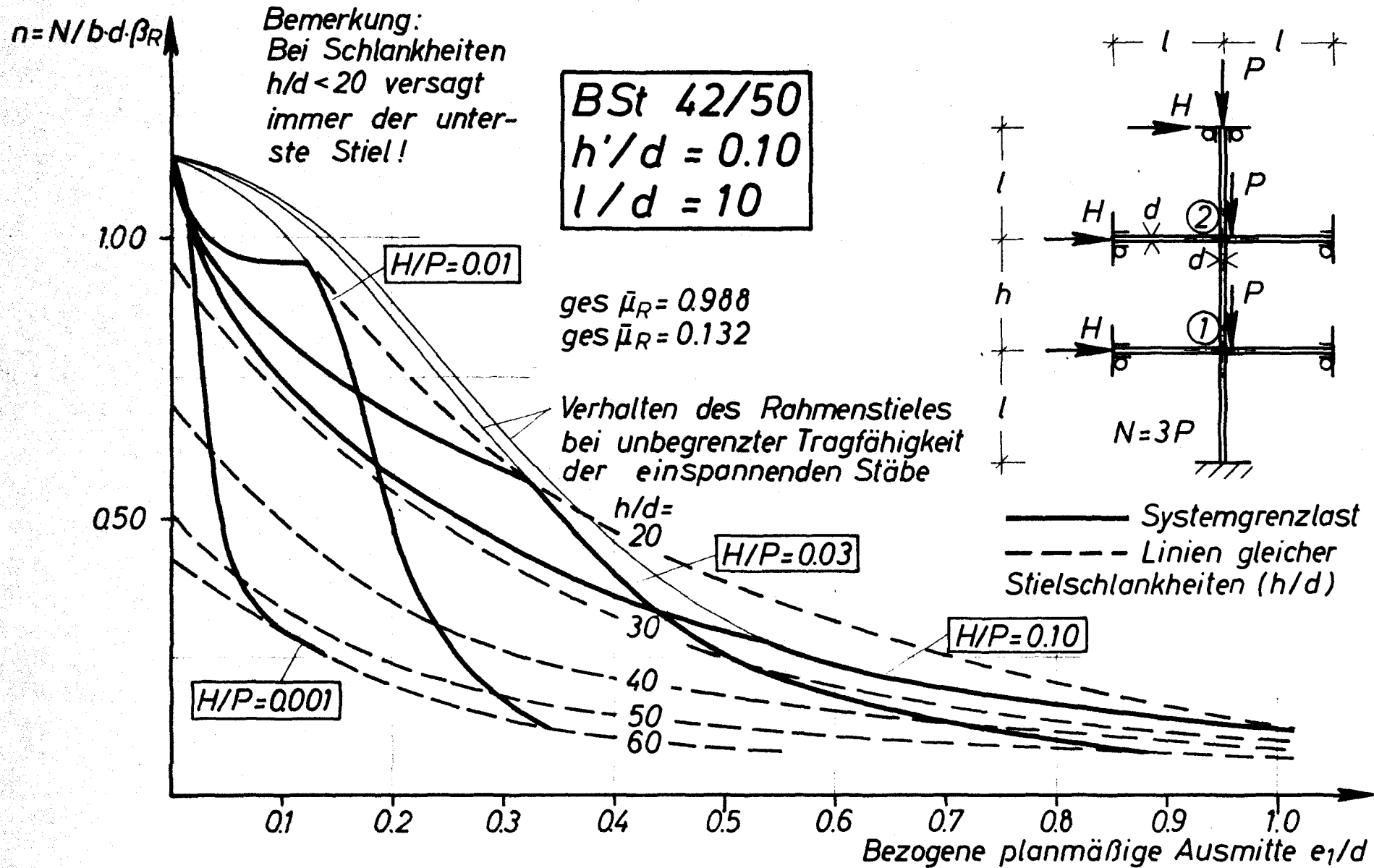
### 3.2.3.2 Einfluß der geometrischen aussteifenden Wirkung der Riegel auf die Systemgrenzlast

In Bild 3.16 sind Traglasten des Teilsystems unter horizontaler und vertikaler Belastung bei variierten geometrischen Riegelsteifigkeiten dargestellt. Als Lastparameter wurde das geschoßweise konstante Verhältnis  $H/P$  gewählt. Um einen deutlichen Schlankheits-einfluß zu erhalten, wurde immer die Stielschlankheit im mittleren Stockwerk variiert, während die übrigen Stiellängen und Riegellängen konstant blieben. Es wurde geringe Stielbewehrung ( $\bar{\mu}_s = 0,132$ ) und starke Riegelbewehrung ( $\bar{\mu}_R = 0,990$ ) der Berechnung zugrunde gelegt, um das vom Beton determinierte, nichtlineare Verformungsverhalten in seiner vollen Wirkung zu erhalten. Die hohe Riegelbewehrung bietet die Möglichkeit, in weiten Bereichen der Einflußgrößen ein Stielversagen zu erzielen. Die Traglasten wurden durch stetige Laststeigerung erreicht, wobei das Verhältnis  $H/P$  während dieser Laststeigerung konstant blieb. Das charakteristische Tragverhalten wird für die praktischen Aussteifungsverhältnisse auch in mehrparametrischer Darstellung in den Bildern 3.17 und 3.18 verdeutlicht, wobei die bezogene planmäßige Lastausmitte  $e/d$  ebenfalls angegeben wurde. Die Bilder 3.17 und 3.18 lassen sich - unter Zuhilfenahme der während der Berechnung gesondert bestimmten planmäßigen Ausmitten - aus dem entsprechenden Bild 3.16 ableiten. Die gewählte Darstellung ermöglicht, die Vielfalt der Versagensmöglichkeiten von Stockwerkrahmen zu veranschaulichen. Die in den Bildern mit stark ausgezogenen Linien wiedergegebenen Kurven gleicher Lastparameter  $H/P$  sind im allgemeinen unstetig und bestehen aus **soviel**





**Bild 3.17** Grenzlasten des verschieblichen Teilsystems;  
Abgrenzung der Versagensbereiche



**Bild 3.18** Grenzlasten des verschieblichen Teilsystems ;  
Abgrenzung der Versagensbereiche

stetigen Kurventeilen, wie das System Stäbe besitzt. (Diese Eigenschaft resultiert aus der Definition der Systemgrenzlast, die durch Versagen eines beliebigen Stabes erreicht wird). Die Vielzahl der Versagensmöglichkeiten reduziert sich bei einem konkreten System auf einige wenige im Bereich des maximal beanspruchten Knotens. (Unter maximaler Beanspruchung wird hier sowohl die ungünstigste Schnittkraftkombination als auch das ungünstigste Verdrehungsverhalten -vergl. Bild 3.14 - , also Materialbruch und Stabilitätsversagen , verstanden.) Im untersuchten repräsentativen Teilsystem tritt das Versagen - entsprechend der Lastanordnung und der Steifigkeiten - als Materialbruch im Bereich des unteren Knotens oder als Stabilitätsversagen infolge des schlanken, mittleren Stiels, ein. Da ein Riegelbruch durch entsprechende Wahl der Riegelbewehrung ausgeschlossen wurde, reduziert sich die Anzahl der Kurventeile entsprechend dem unteren und mittleren Stiel auf zwei.

Aus den Bildern 3.16 bis 3.18 lassen sich folgende Erkenntnisse gewinnen:

- 1) Im Schlankheitsbereich bis zu etwa

$$h/d \lesssim 25$$

versagt sehr häufig der unterste, meistbeanspruchte Rahmenstiel infolge Materialbruchs. Dieses Verhalten ist eine Folge der natürlichen, von oben nach unten zunehmenden Belastungsgrößen.

- 2) Der Schlankheitseinfluß des mittleren Stiels wird ab

$$h/d \gtrsim 25$$

markant. In diesem Schlankheitsbereich tritt Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung ein.

- 3) Liegt der schlankste Stiel im untersten, meistbeanspruchten Geschoß, so versagt er häufig alserster. Der Stabilitätsnachweis des Gesamtsystems könnte auf das unterste Geschoß beschränkt bleiben.



4) Stielschlankheiten oberhalb des Wertes

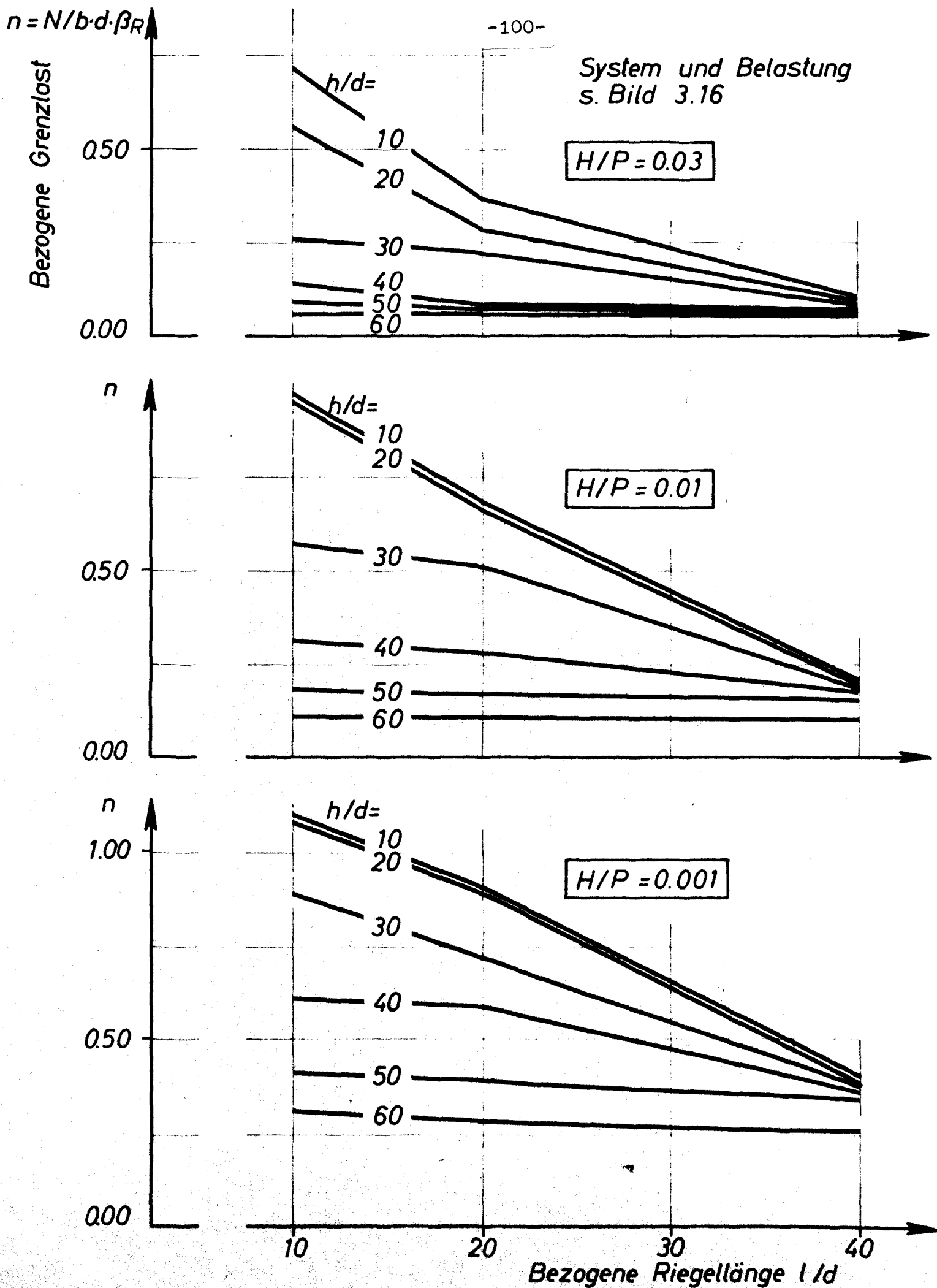
$$h/d \gtrsim 45$$

sind äußerst stabilitätsgefährdet. Der Verlauf der Linien gleicher Stielschlankheiten in den Bildern 3.17 und 3.18 zeigt, daß die Grenzlast vom Lastparameter  $H/P$  in diesem Bereich wenig abhängt; die Tragfähigkeit ist primär durch die hohe Schlankheit begrenzt.

Die aussteifende Wirkung der Riegel ist in Bild 3.19 noch auf andere Weise dargestellt. Hierbei wurden ebenfalls die Traglasten aus Bild 3.16 verwendet. Die Bilder 3.16 und 3.19 zeigen, daß die geometrische Aussteifung im Bereich geringerer Stielschlankheiten ( $h/d \lesssim 25$ ) sehr wirksam ist. Dieser Sachverhalt ist durch Umlagerung des Versagensquerschnitts zwischen den Stielen 5 und 7 (siehe Bild 3.1 und 3.17 bzw. 3.18) zu erklären. Im Bereich größerer Stielschlankheiten ( $h/d \gtrsim 25$ ) läßt die aussteifende Wirkung der Riegel nach, das System versagt durch Instabilwerden seines schlanksten, beidseitig inelastisch eingespannten Stiels.

Das Tragverhalten des Systems zeigt, daß eine unabhängige Bemessung der einzelnen Systemstäbe zur Überdimensionierung führen kann. In den vorliegenden Beispielen kann die Tragfähigkeit des Stiels 5, bedingt durch das vorzeitige Versagen des Stiels 7 in dem oben genannten niedrigeren Schlankheitsbereich nicht voll ausgenutzt werden.

Um eine optimale Dimensionierung der Stäbe einer System-Lastanordnung zu erreichen, könnten die Bewehrungsanteile in den meist ausgenützten Querschnitten beim Erreichen der Grenzbeanspruchung erhöht und weitere Laststeigerungen vorgenommen werden. Eine entsprechende Modifizierung des Rechenprogramms nach Abschnitt 2 läßt sich ohne größere Schwierigkeiten vornehmen.



**Bild 3.19 Einfluß der Riegelschlankheit auf die Grenzlast**

### 3.2.3.3 Einfluß der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast

In den Bildern 3.20 bis 3.22 werden Untersuchungsergebnisse an Systemen größerer geometrischer Aussteifung ( $l/d = 10$ ) mit mittleren und großen Bewehrungsprozent-sätzen in den Stielen gezeigt. Die gewählten hohen Riegelbewehrungsgrade ( $\bar{\mu}_R = \bar{\mu}'_R = \mu \cdot \beta_S / \beta_R = 0,495$ , d.h. je Seite 3 % bei mittleren Betongüten) verhindern ein vorzeitiges Riegelversagen, so daß sinngemäß die Feststellungen aus Abschnitt 3.2.3.2 gelten. Der Einfluß der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast läßt sich leicht aus den Bildern 3.16, 3.20 und 3.21 ableiten. In Bild 3.23 wurde diese Abhängigkeit dargestellt.

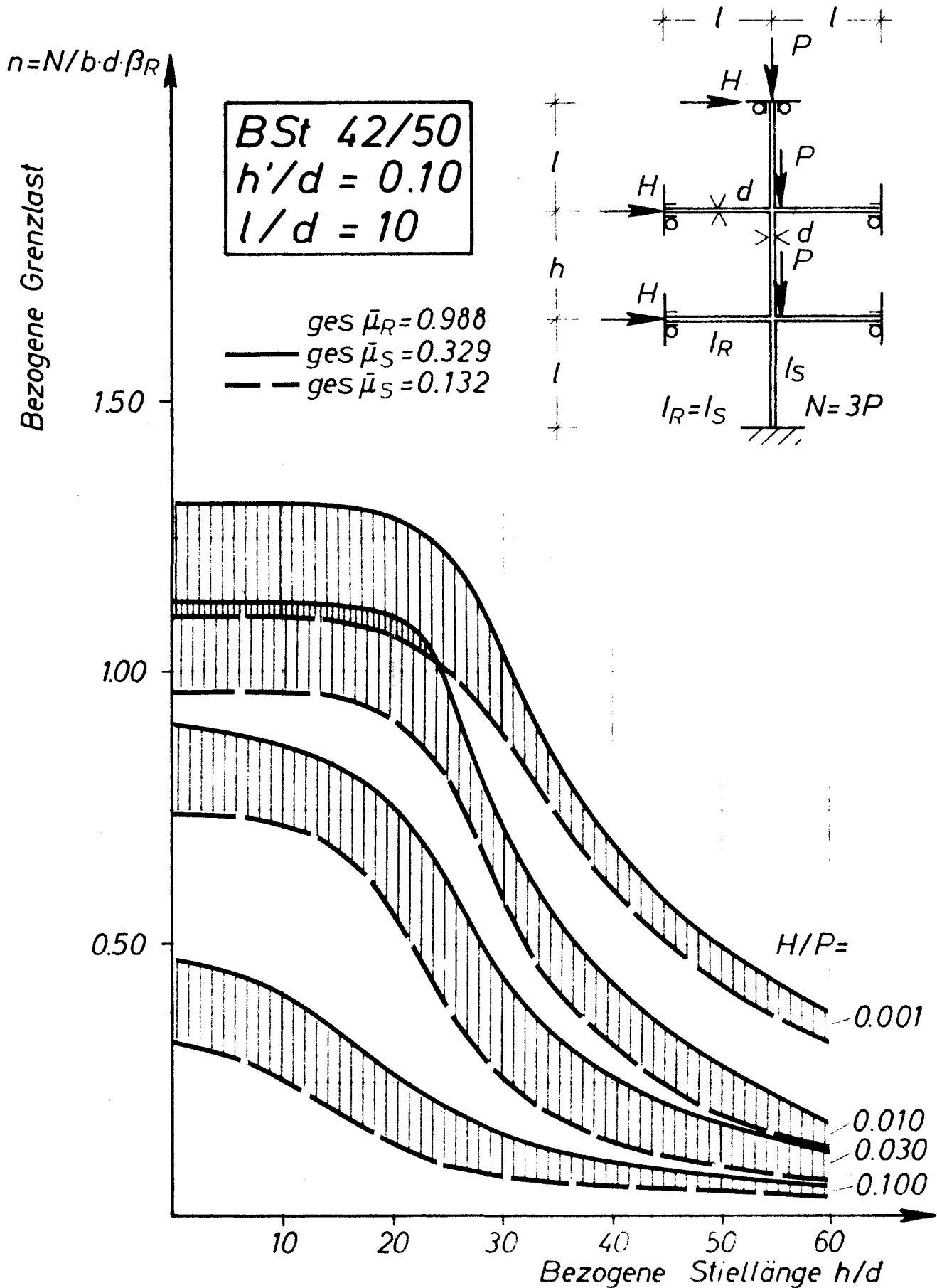
Aus den in Bild 3.23 dargestellten Ergebnissen lassen sich folgende Konsequenzen ableiten:

- 1) Wird ein frühzeitiges Riegelversagen durch entsprechende Bewehrung verhindert, so hängt die Grenzlast des betreffenden verschieblichen Stockwerkrahmens von der Stielbewehrung annähernd linear ab.
- 2) Geringere Abweichungen von diesem Verhalten werden durch das verschiedenartige Versagen des mittleren bzw. des unteren Stiels erklärt (vergl. Bild 3.22 und Abschnitt 3.2.3.2).

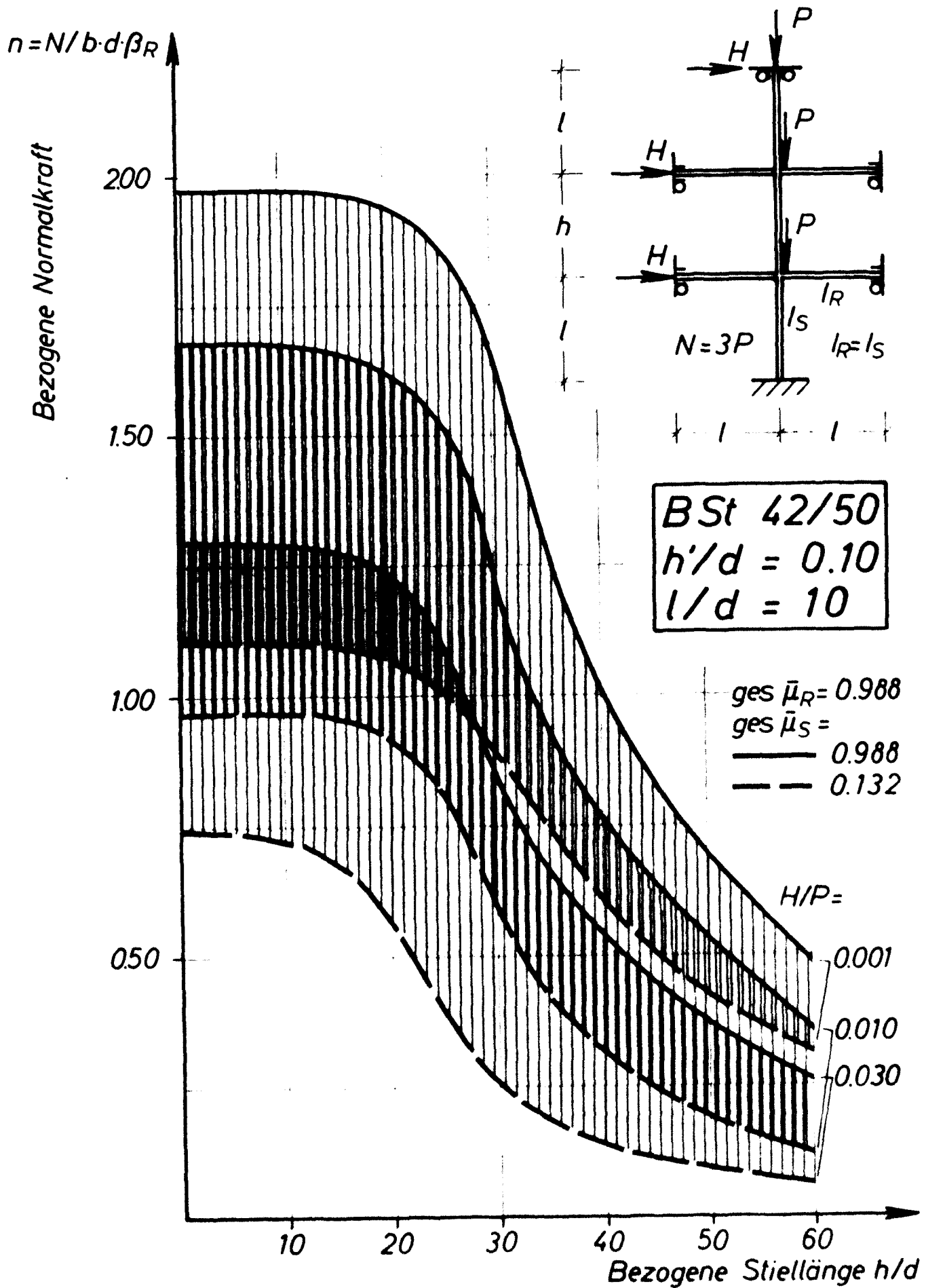
### 3.2.3.4 Einfluß der Riegelbewehrung auf die aussteifende Wirkung der Riegel

In den Abschnitten 3.2.3.2 und 3.2.3.3 wurden Systeme mit hochbewehrten Riegeln ( $\bar{\mu}_R = \bar{\mu}'_R = \mu \cdot \beta_S / \beta_R = 0,495$ ) untersucht. In den behandelten Fällen trat daher grundsätzlich Stielversagen ein. Bei Systemen mit weniger stark bewehrten Riegeln wird die Grenzlast oft durch Riegelversagen erreicht. Im folgenden wird daher der Einfluß der Größe der Riegelbewehrung näher untersucht.

In den Bildern 3.24 und 3.25 sind Grenzlastdiagramme gleicher System-Lastanordnungen, jedoch verschiedener Riegelbewehrungen gegenübergestellt. Die Auswahl der

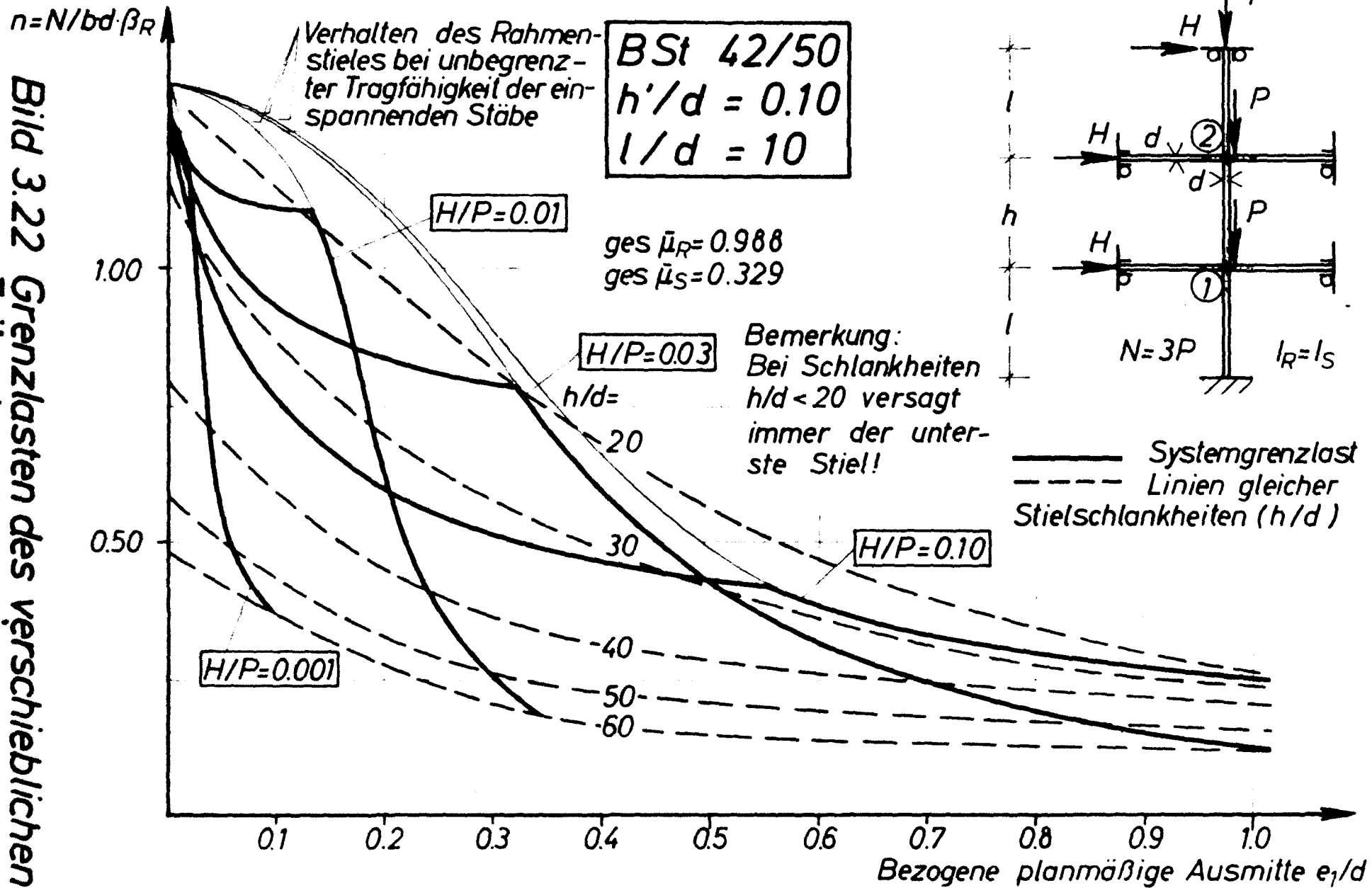


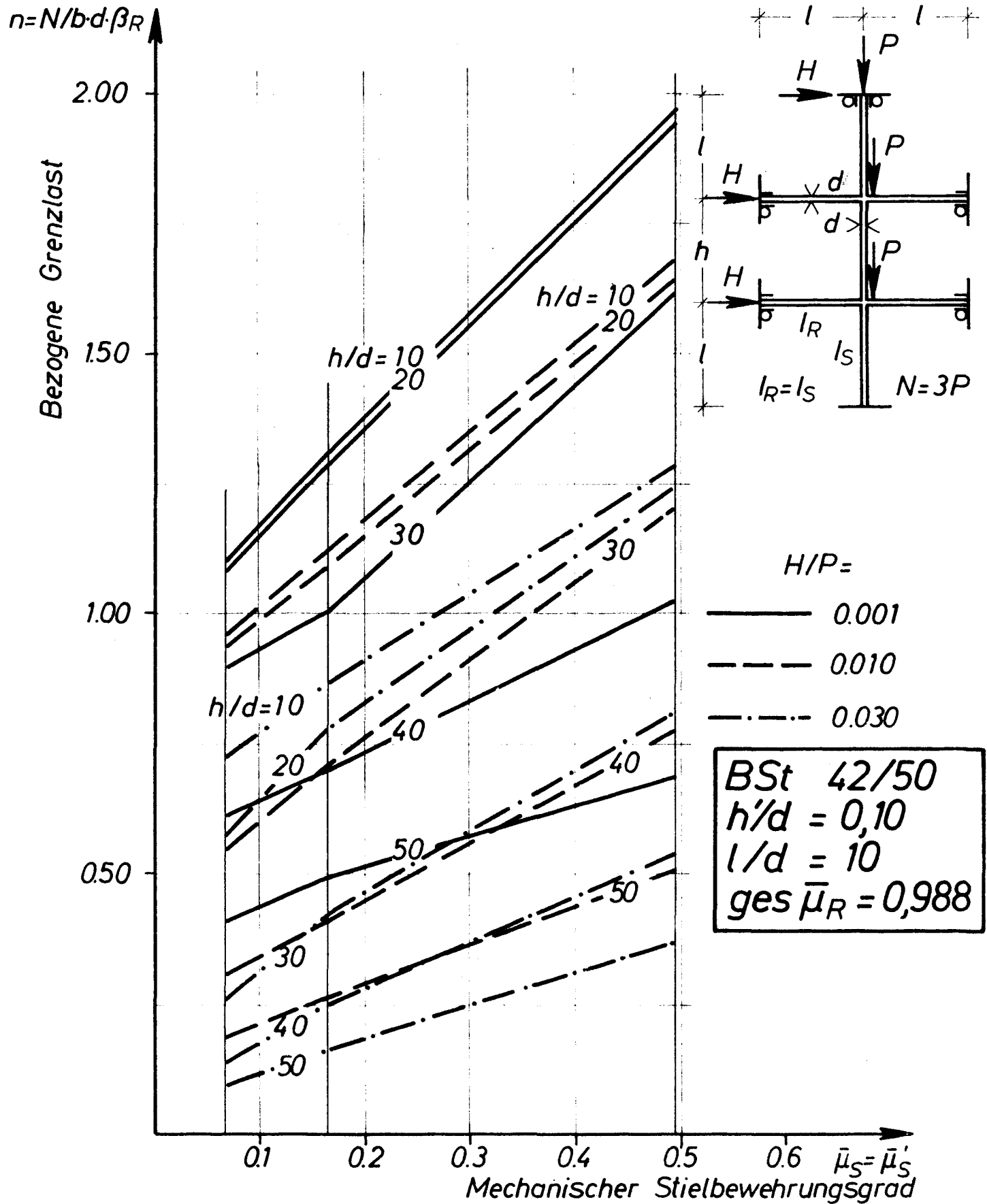
**Bild 3.20** Einfluß der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast



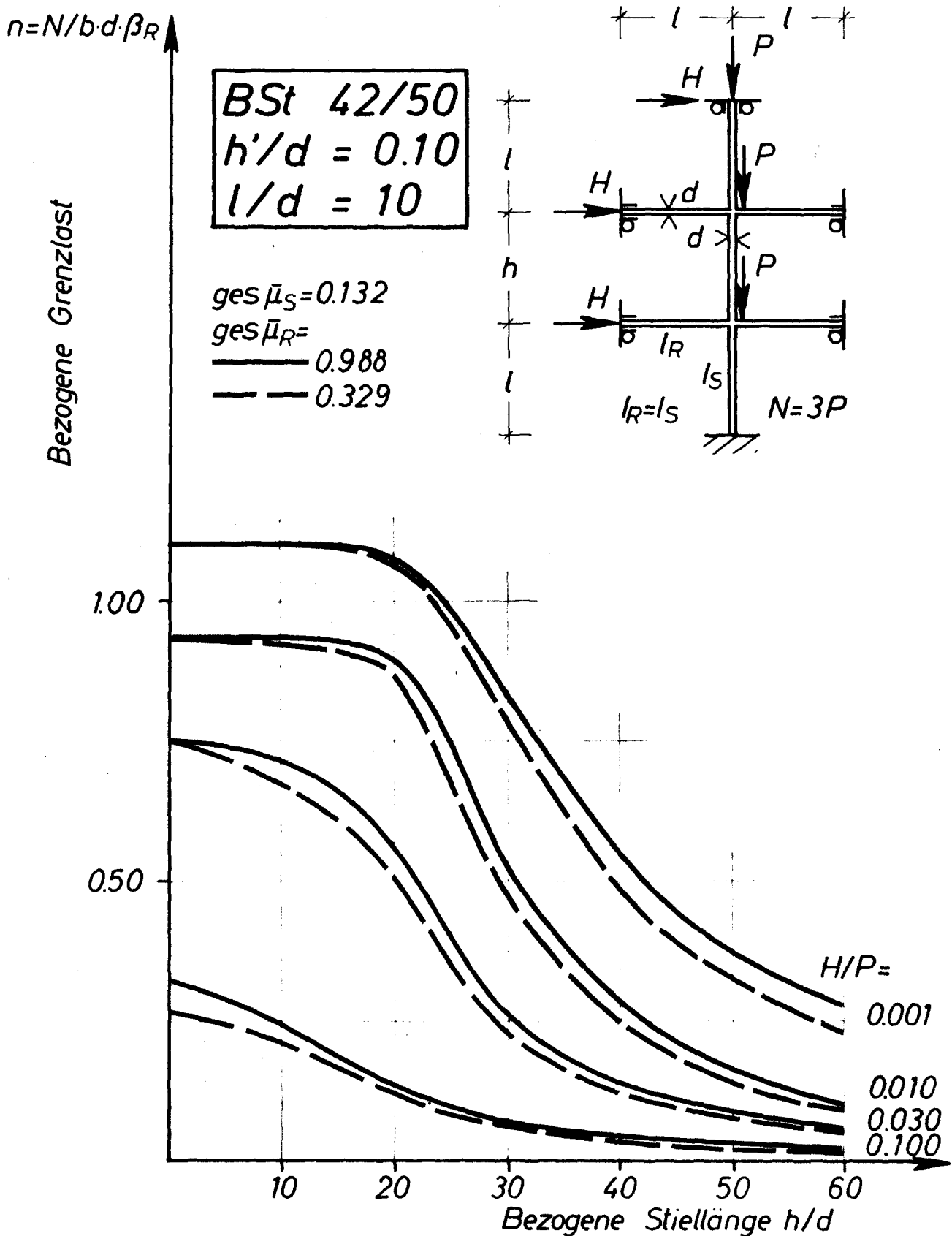
**Bild 3.21** *Einfluß der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast*

**Bild 3.22 Grenzlasten des verschieblichen Teilsystems;  
Abgrenzung der Versagensbereiche**



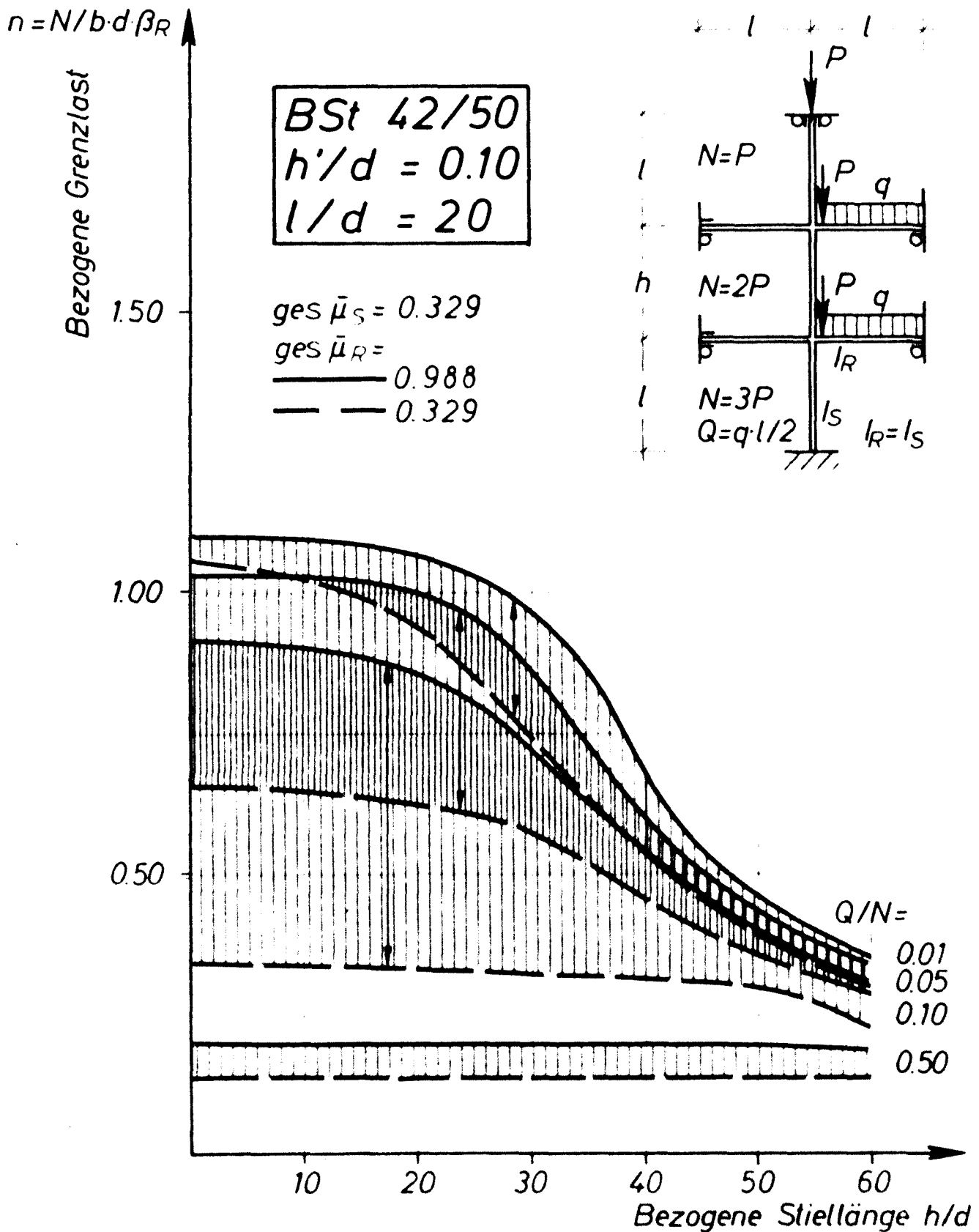


**Bild 3.23** Einfluß der Größe der Stielbewehrung auf die Systemgrenzlast



**Bild 3.24** Einfluß der Riegelbewehrung auf die Systemgrenzlaster (Riegel unbelastet)





**Bild 3.25** Einfluß der Riegelbewehrung auf die Systemgrenzlast (Riegel belastet)

System-Lastanordnungen kann als repräsentativ angesehen werden. Es wurden sowohl Horizontallasten als auch Riegelquerlasten außer den Normalkräften der axialen Belastung angesetzt. Eine mittlere ( $\bar{\mu}_R = \bar{\mu}'_R = 0,165$ ) und eine hohe Riegelbewehrung ( $\bar{\mu}_R = \bar{\mu}'_R = 0,495$ ) wurden in Rechnung gestellt. Eine geringere Riegelbewehrung ist bei den gewählten Querschnitten ( $I_R = I_S$ ) unwahrscheinlich wegen der Biegebeanspruchung des Riegels. (Das Zusammenwirken der Riegel- und Stielbewehrung wird in Abschnitt 4 näher behandelt.)

Die Ergebnisse der Bilder 3.24 und 3.25 lassen folgende Schlüsse zu:

- 1) In geometrisch ausreichend ausgesteiften Systemen (siehe Bild 3.24) ohne nennenswerte Riegelquerlasten ist der Einfluß der Riegelbewehrung auf die Systemgrenzlast gering. Dieser Sachverhalt erklärt sich dadurch, daß die gewählten Riegelbewehrungen im gesamten Untersuchungsbereich in der Lage waren, die Verformungsmomente an den Knoten voll aufzunehmen. Die geringfügige Steigerung der Grenzlast infolge erhöhter Riegelbewehrung ist auf die größeren ideellen Riegelsteifigkeiten zurückzuführen.
- 2) Sind die aussteifenden Riegel verhältnismäßig schlank (Bild 3.25,  $l/d = 20$ ) und werden sie durch Querbela-  
stung stark beansprucht ( $Q/P \geq 0,01$ ), so versagt das System meist infolge Riegelbruchs. Der Einfluß der Riegelbewehrung auf die Systemgrenzlast ist erheblich. Die Tragkapazität der Riegel verhindert also die volle Ausschöpfung der Tragfähigkeit der Stiele.
- 3) Im Bereich großer Stielschlankheiten

$$h/d \gtrsim 45$$

ist die aussteifende Wirkung der Riegelbewehrung nicht effektiv.

#### 4) Im Falle großer Riegelquerlasten

$$Q/N \gtrsim 0,50$$

ist kein wesentlicher Schlankheitseinfluß vorhanden.  
Die Riegel versagen, ohne den Stielen eine kritische Beanspruchung übertragen zu können.

Zur Erläuterung der gewonnenen Ergebnisse sei ein Regelstockwerkrahmen ( $l = \text{konst.}$ ,  $h = \text{konst.}$ ,  $g = \text{konst.}$ ,  $q = \text{konst.}$ ) hinsichtlich Abtragung der lotrechten Lasten untersucht:

Die Normalkraft im  $i$ -ten Geschoß ist

$$P_i = l_i (g_i + q_i) \quad (3.11)$$

Die Gesamtnormalkraft von oben bis zum Geschoß  $i$ :

$$N_i = \sum_1^n P_i = n \cdot l (g+q) \quad (3.12)$$

Einseitige Nutzlast im Geschoß  $i$ :

$$Q_i \approx \frac{1}{2} l \cdot q \quad (3.13)$$

Der Lastparameter  $Q_i/N_i$  wird zu

$$\frac{Q_i}{N_i} = \frac{1}{n(g/q + 1) \cdot 2} \quad (3.14)$$

Die Formel zeigt, daß die Geschoßzahl  $n$  und das Lastverhältnis  $g/q$  die Größe des Lastparameters  $Q/N$  definiert, d.h. in jedem Stockwerk gilt ein anderer Lastparameter, der das Tragverhalten (siehe Bild 3.25) entscheidend beeinflusst. Z.B. wird in dem praktischen Fall  $g = q$  und  $n = 10$

$$Q_i/N_i = 0,025.$$

Zwischen Stockwerkzahl und Grenzlast besteht ein Zusammenhang. Größere Stockwerkzahlen führen zu kleineren Lastparametern  $Q/N$ , d.h. zu kleineren planmäßigen Ausmitten in den Stielen, die die Traglast maßgebend beeinflussen. Die aussteifende Wirkung der Bewehrung ist auch in diesem Bereich ( $Q/N = 0,01 - 0,05$ ) bedeutend. (Bild 3.25)

Im Interesse einer wirtschaftlicheren und sichereren Bemessung wäre es notwendig, die wichtige Einflußgröße Riegelbewehrung mit in den Stabilitätsnachweis einzuführen. Eine Möglichkeit hierfür ist die in Abschnitt 3.2.3.2 vorgeschlagene optimale Dimensionierung mittels leichter Modifizierung des Rechenverfahrens nach Abschnitt 2.

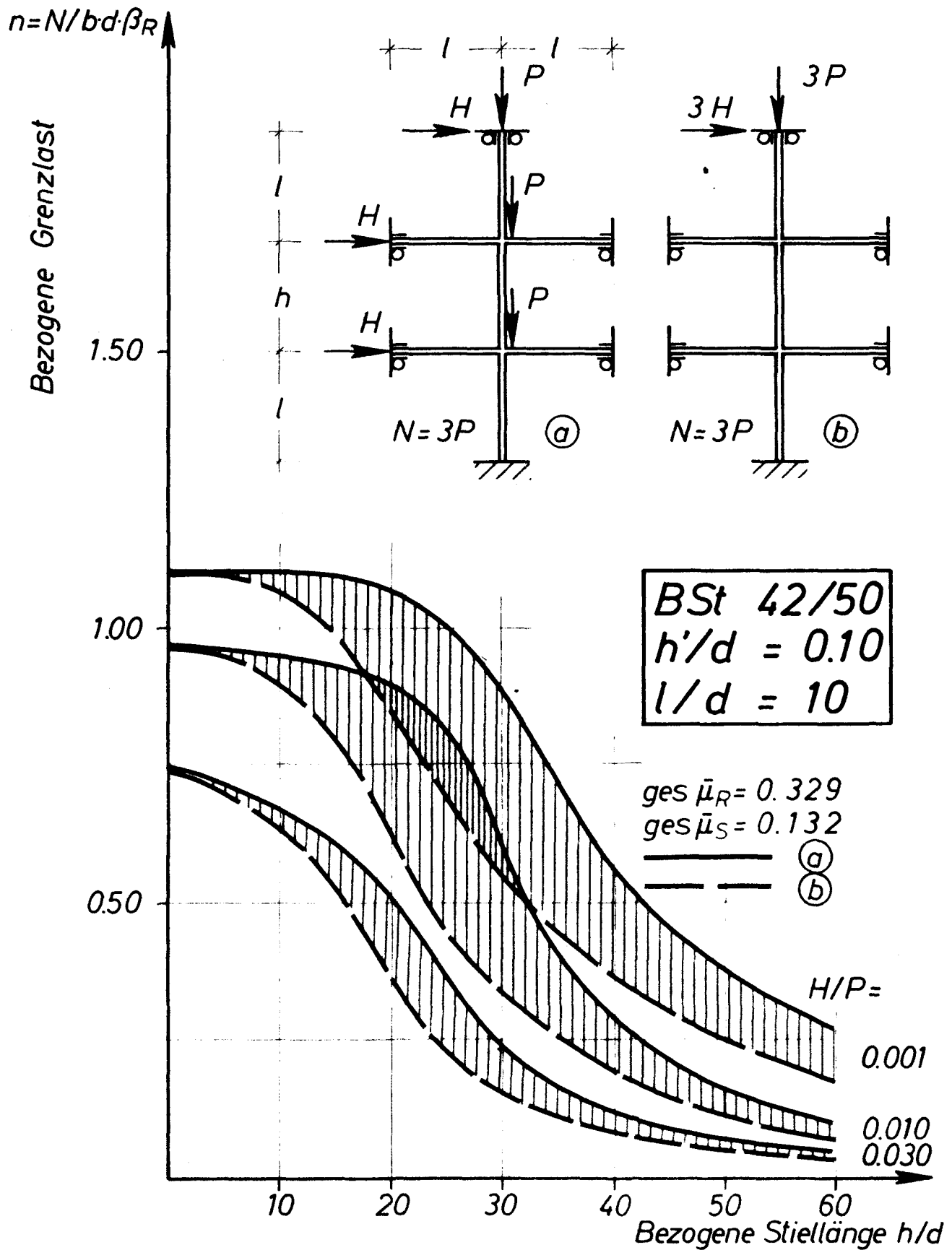
### 3.2.3.5 Aus Belastungsart und -anordnung herrührende Einflüsse

Stahlbetonstäbe besitzen eine beanspruchungsabhängige "wirksame Stabsteifigkeit". Die Stabsteifigkeiten bestimmen die Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix des Systems nach Gl. (2.42) bzw. (2.43). Die durch diese Gleichungen errechenbaren Verformungsvektoren  $\underline{\delta}, \underline{y}$  hängen daher nicht nur direkt von den Belastungen, sondern auch von deren Einfluß auf die Stabsteifigkeiten ab. Entsprechend dieser Feststellung gibt es für einen Einzelstab drei wesentliche Formen der Beanspruchung, die die effektive Stabsteifigkeit erheblich beeinflussen können, nämlich:

- 1) Biegung der Riegel aus Querlasten
- 2) Biegung der Stiele aus Horizontallasten und Momenten nach Theorie II. Ordnung
- 3) Achsdruck der Stiele.

Das Maß der "Verformungswilligkeit" des Gesamtsystems, die Steifigkeitsmatrix, wird dann je nach Beanspruchungsart der Einzelstäbe mehr oder weniger lastabhängig.

Welche Anordnungen der axialen Beanspruchung auf die kritische Last einen wesentlichen Einfluß ausüben können, wurde bereits in Abschnitt 3.2.1 durch elastizitätstheoretische Untersuchungen geklärt. Entsprechende Grenzlasterberechnungen für das repräsentative Teilsystem aus Stahlbeton sind in den Bildern 3.26 und 3.27 dargestellt. In Bild 3.26 wurden die bezogenen Systemtraglasten in Abhängigkeit der bezogenen Stablänge des mittleren



**Bild 3.26** Einfluß der Lastverteilung auf die Systemgrenzlast

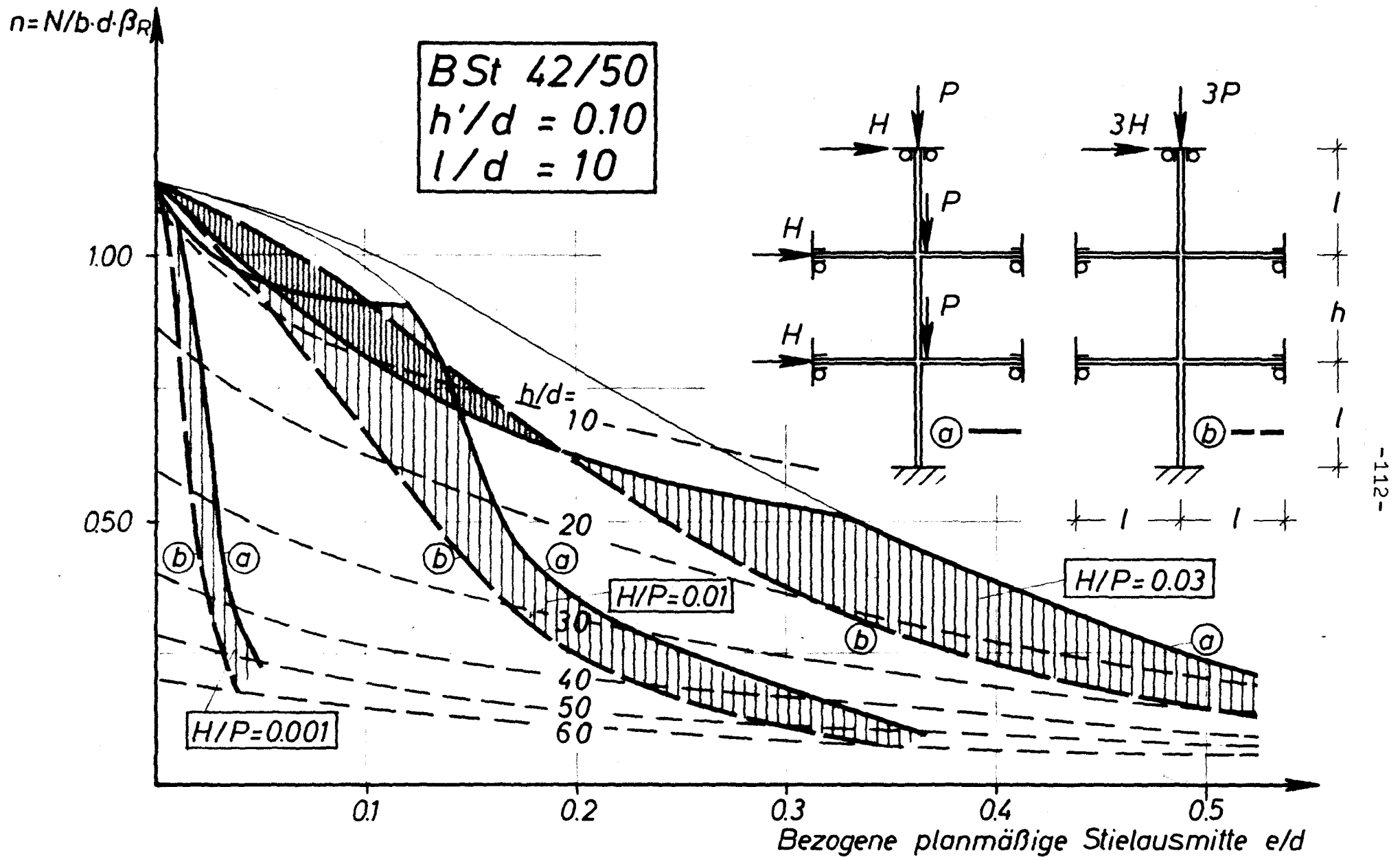


Bild 3.27 Einfluß der Lastverteilung auf die Systemgrenzlast ;  
 Abgrenzung der Versagensbereiche

Stiels ("schwächstes Glied") aufgezeigt. In Bild 3.27 ist die schon gezeigte Mehrparameterdarstellung angewendet worden. In beiden Bildern bedeuten die schraffierten Flächen die Differenz der Systemgrenzlasten zweier Lastanordnungen. Es sei betont, daß stets Systemgrenzlasten dargestellt wurden (Summe aller lotrechten Lasten) unabhängig davon, welches Tragglied versagte. Dieser Umstand ist bei Betrachtung der Bilder zu beachten. Vergleicht man nämlich die zugehörigen Traglastordinaten beider Lastanordnungen, so ist das Lastverhältnis ( $3P : 2P = 3H : 2H$ ) im mittleren Stiel, der bei größeren Stielschlankheiten als Versagensursache gilt, zu berücksichtigen. Zum Vergleich kann auch Bild 3.3 - elastizitätstheoretische Knicklasten der betreffenden System-Lastanordnungen - herangezogen werden. Bei Beachtung dieser Umstände kann den Bildern 3.26 und 3.27 folgendes entnommen werden:

- 1) Im Bereich größerer Schlankheiten des mittleren Stieles verhalten sich die Grenzlasten beider untersuchten System-Lastanordnungen zueinander ähnlich wie die elastizitätstheoretischen Knicklasten. Das bedeutet u.a., daß der Einfluß des nichtlinearen Werkstoffgesetzes infolge geringer axialer Auslastung der Stiele nicht groß ist.

Im betreffenden Schlankheitsbereich

$$h/d \gtrsim 30$$

tritt eine Differenz der entsprechenden kritischen Lasten der Stiele, bedingt durch die Lastanordnung, bis zu etwa 13 % auf.

- 2) Die Systemgrenzlast wird im Bereich kleinerer Stielschlankheiten

$$h/d \lesssim 30$$

dadurch stark von der Lastanordnung beeinflusst, daß infolge verschiedenartiger Beanspruchung der einzelnen Stäbe in beiden System-Lastanordnungen die Versagensursache variiert. So können z.B.

Bereiche vorkommen (in Bild 3.27 dicht schraffiert gezeichnet), in denen die vermeintlich günstigere Lastanordnung niedrigere Grenzlasten liefert. Dieser Sachverhalt läßt sich von der Definition der Grenzlast (vergl. Abschnitt 2.1.1) aus erklären.

### 3) Der Schlankheitsbereich

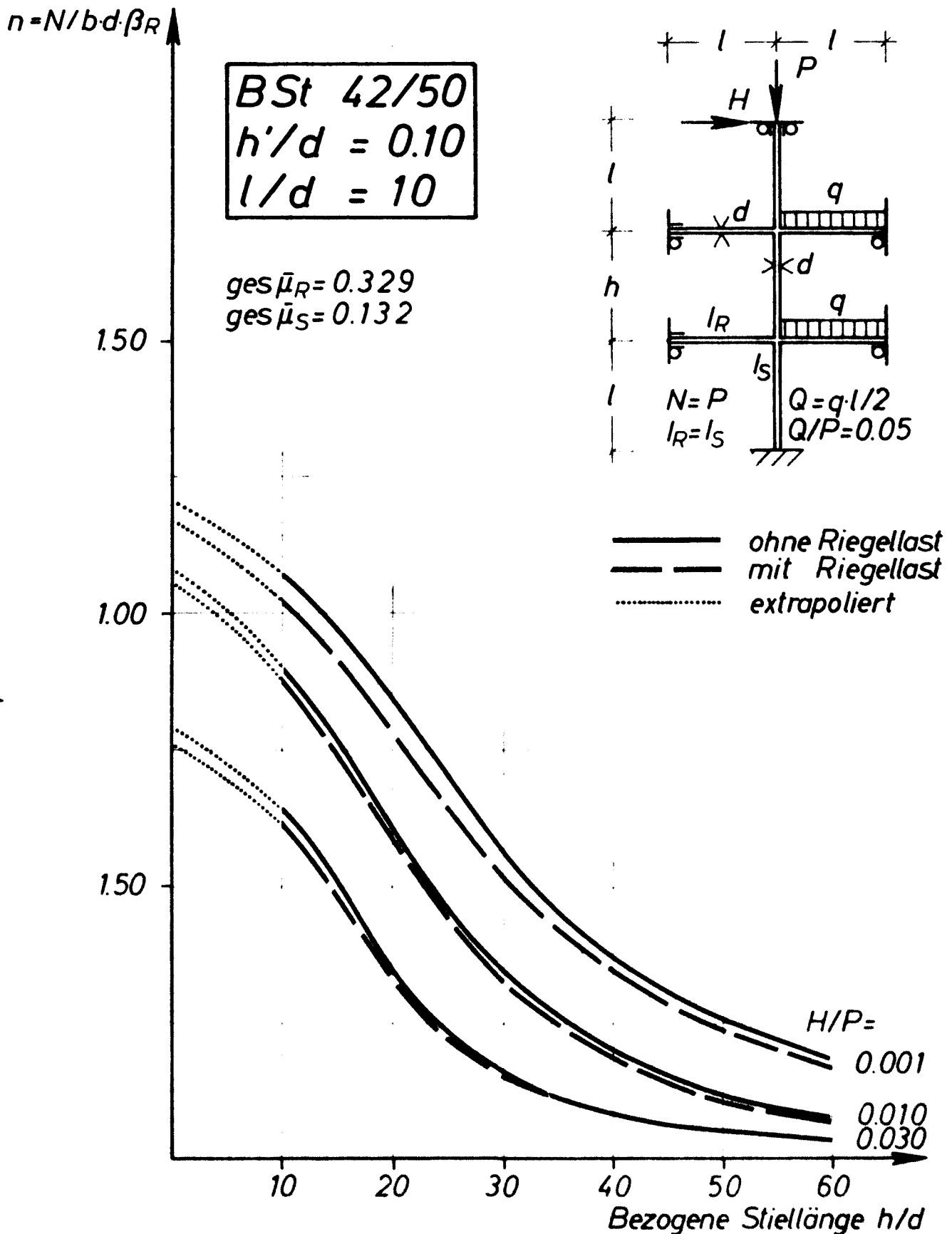
$$h/d > 45$$

erscheint hier erneut als sehr stabilitätsgefährdet. Der flache Verlauf der Linien gleicher Schlankheiten  $h/d = 50$  und  $60$  zeigt, daß in diesem Schlankheitsbereich der seitliche Widerstand des Systems minimal ist und zur Aussteifung wenig geeignet.

In den bisherigen Untersuchungen wurden die axialen Lasten entweder mit horizontalen Lasten oder mit Riegelquerlasten gleichzeitig angesetzt. In der Wirklichkeit treten diese im maßgebenden Beanspruchungszustand zusammen auf. In Bild 3.28 ist ein solcher kombinierter Lastfall dargestellt. Das Bild läßt erkennen, daß

- 1) die Traglast wenig von dem zusätzlichen, von der Nutzlast des Riegels erzeugten Anteil der Stielausmitte beeinflusst wird, wenn der Lastparameter  $Q/N$  verhältnismäßig klein ist (hier:  $Q/N = 0,05$ ).  
(Voraussetzung: ausreichende Riegelbewehrung. Die Bedingung ausreichender "stabilisierender" Riegelbewehrung kann näherungsweise Abschnitt 4 entnommen werden);
- 2) folglich für Stabilitätsuntersuchungen höherer Stockwerkrahmen (wo  $Q/N < 0,05$  ist) die Berücksichtigung der waagerechten und lotrechten Knotenlasten zu fordern genügt;
- 3) der Einfluß der Riegelquerlast dann nur in seiner Wirkung auf die Riegelsteifigkeit zu berücksichtigen ist.





**Bild 3.28** Einfluß gleichzeitiger Horizontal- und Riegelquerbelastung auf die Grenzlast. (Modell für den unteren Bereich eines Hochhauswindrahmens)

### 3.3 Untersuchungen über die "wirksamen Stabsteifigkeiten"

Die Definition der "wirksamen Stabsteifigkeiten" ist in Abschnitt 2.2.4 angegeben. Ein Stahlbetonstab hat im allgemeinen einen entlang der Stablänge veränderlichen Beanspruchungszustand, dem eine von Ort zu Ort veränderliche Steifigkeit entspricht. Die örtliche Steifigkeit weicht je nach Beanspruchungsart mehr oder minder von der integrierten "wirksamen Stabsteifigkeit" ab (vergl. Abschnitt 2.2.5). Letztere ist jedoch im Rahmen des vorliegenden Näherungsverfahrens bis zum Erreichen der inelastischen Grenzlast maßgebend für das Verformungsverhalten des Stabes im Gesamtsystem. Da jedoch die Bestimmung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" nur im Rahmen einer Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung möglich ist, wäre interessant zu wissen, welcher Zusammenhang zwischen der Steifigkeit des maximal beanspruchten Stabquerschnitts und der des Stabes besteht. Zur Klärung dieses Problems wurden während einiger Grenzlastbestimmungen der vorigen Abschnitte sowohl die "wirksame Stabsteifigkeit" als auch die Steifigkeiten der maximal beanspruchten Querschnitte bestimmt. Eine Auswahl der errechneten Steifigkeitswerte und ein entsprechender Vergleich ist auf den Bildern 3.29 bis 3.31 dargestellt. Der auf die Steifigkeit des ungerissenen Betonquerschnitts ( $E_b I_b$ ) bezogene Abminderungsfaktor  $k$  ist als Funktion des Belastungsgrades  $v = N/N_0$  angegeben. Die Werte  $k$  beziehen sich auf den mittleren Stiel des Teilsystems. Folgende Erkenntnisse sind den Bildern 3.29 bis 3.31 zu entnehmen:

- 1) Im Bereich kleiner planmäßiger Stiellastausmitten ( $e/d \lesssim 0,05$ ) weichen die Werte der "wirksamen Stabsteifigkeit" und der Steifigkeit des maximal beanspruchten Querschnitts voneinander wenig ab (Bild 3.29). Der charakteristische Verlauf von  $k$  wird durch die axiale Beanspruchung geprägt. Eine deutliche Abweichung tritt allerdings ab etwa 90 % der Traglast des

$$k_1 = \frac{(EI)w}{E_b \cdot I_b}$$

$$k_2 = \frac{E \cdot I}{E_b \cdot I_b}$$

BSt 42/50  
 $h'/d = 0.10$   
 $l/d = 10$   
 $H/P = 0.01$

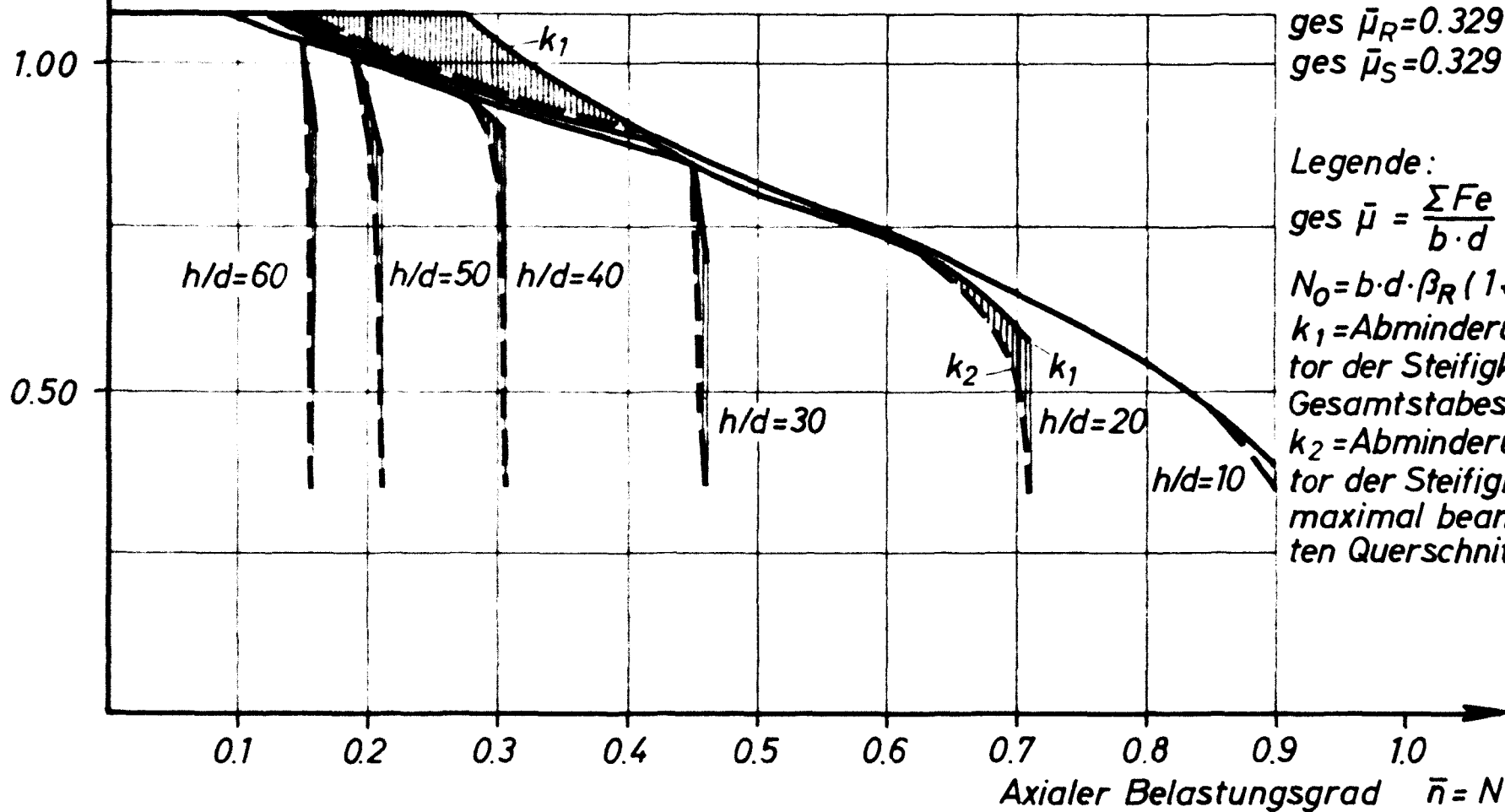
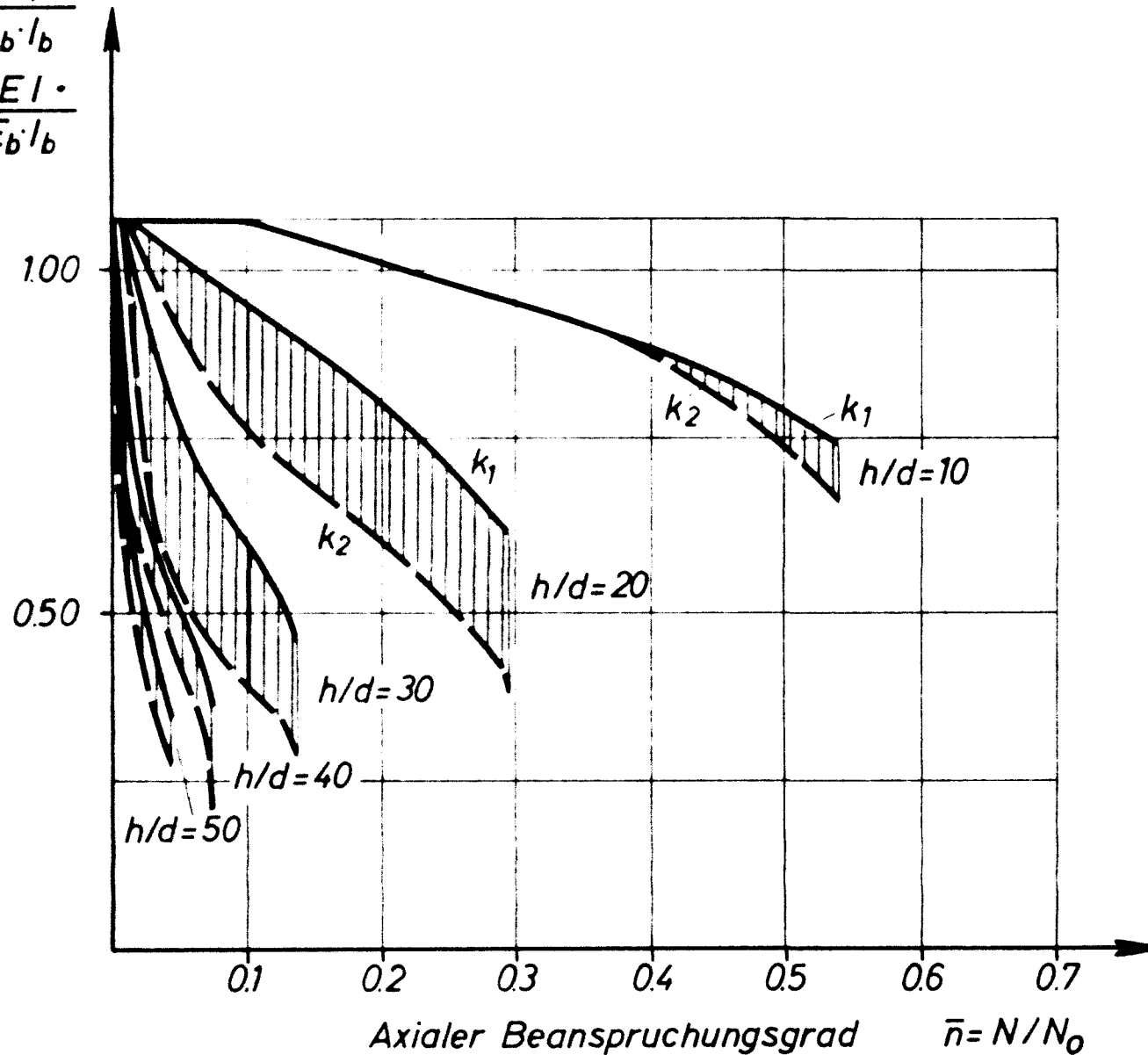


Bild 3.29 Abminderungsfaktoren der Stab- und Querschnittssteifigkeiten

$$k_1 = \frac{(EI)w}{E_b \cdot I_b}$$

$$k_2 = \frac{EI \cdot}{E_b \cdot I_b}$$



BSI 42/50  
 $h'/d = 0.10$   
 $l/d = 10$   
 $H/P = 0.03$

ges  $\bar{\mu}_R = 0.329$   
 ges  $\bar{\mu}_S = 0.132$

Legende:

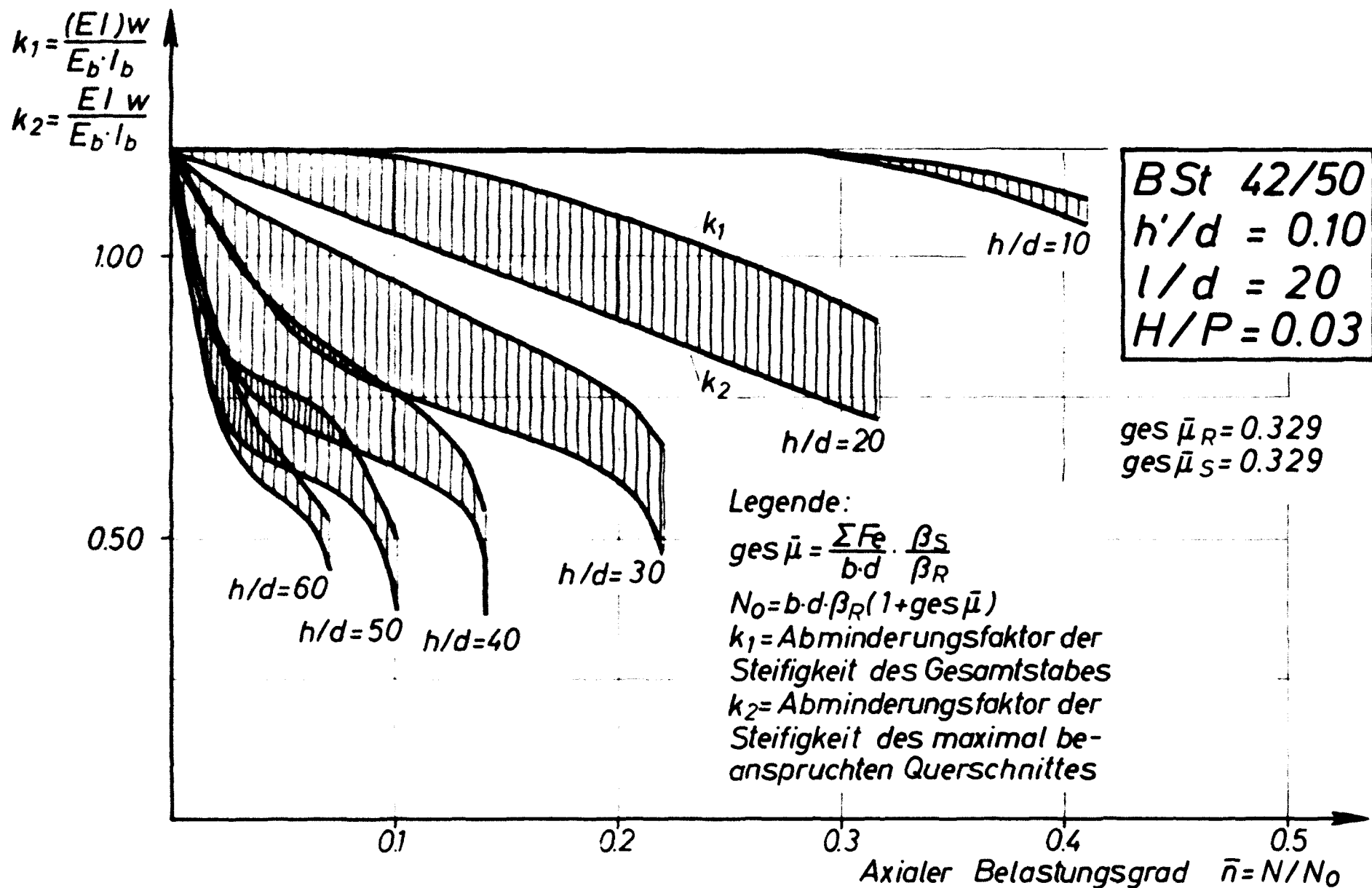
$$\text{ges } \bar{\mu} = \frac{\sum Fe}{b \cdot d} \cdot \frac{\beta_R}{\beta_S}$$

$$N_0 = b \cdot d \cdot \beta_R (1 + \text{ges } \bar{\mu})$$

$k_1$  = Abminderungsfaktor der Steifigkeit des Gesamtstabes

$k_2$  = Abminderungsfaktor der Steifigkeit des maximal beanspruchten Querschnittes

Bild 3.30 Abminderungsfaktoren der Stab- und Querschnittssteifigkeiten



**Bild 3.31** Abminderungsfaktoren der Stab- und Querschnittssteifigkeiten

Systems auf. Die maximale, auf die Querschnittssteifigkeit bezogene Abweichung beträgt + 50 bis + 100 %. Es ist bemerkenswert, daß die großen Abweichungen, schlankheitsbedingt, entsprechend dem waagrecht werdenden Ast der Lastverformungskurve plötzlich auftreten; Vorgang des Stabilitätsversagens.

- 2) Im Bereich mittlerer bis großer Stielausmitten ( $e/d \gtrsim 0,05$ ) treten schon bei niedrigeren Laststufen beträchtliche Abweichungen beider Steifigkeitsarten auf. Der Stab besitzt bis zu 50 % höhere Steifigkeit als der maximal beanspruchte Querschnitt. Die verhältnismäßig großen Abweichungen auch bei niedrigeren Laststufen zeigen, daß infolge höherer Lastausmitten an den meistbeanspruchten Stielenden geringere örtliche Steifigkeiten vorhanden sind als im mittleren, auf Biegung weniger beanspruchten Stabbereich.
- 3) Im Gesamtbereich der planmäßigen bezogenen Stielausmitten ist der starke Einfluß des axialen Belastungsgrades auf die Steifigkeiten zu verzeichnen.
- 4) Die Riegelsteifigkeiten - angenommen, daß keine Biegezugfestigkeit des Betons vorhanden ist - vergl. Abschnitt 2.2.2 - zeigen eine relative Unabhängigkeit von der Laststufe. Dieses Verhalten ist leicht einzusehen, weil bis zum Fließen der Riegelzugbewehrung in jedem Querschnitt nahezu den Momenten proportionale Krümmungen herrschen. (Annähernd bilineare M-K Beziehung). Die Riegelsteifigkeit ist also in Näherung gleich der Steifigkeit des maximal beanspruchten Querschnitts.

Im folgenden Abschnitt wird ein Näherungsansatz gegeben, der diesen Feststellungen und den Berechnungen in Abschnitt 2.2.5 Rechnung trägt und zur Bestimmung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" prismatischer, symmetrisch bewehrter Stahlbetonstäbe angewendet werden kann.

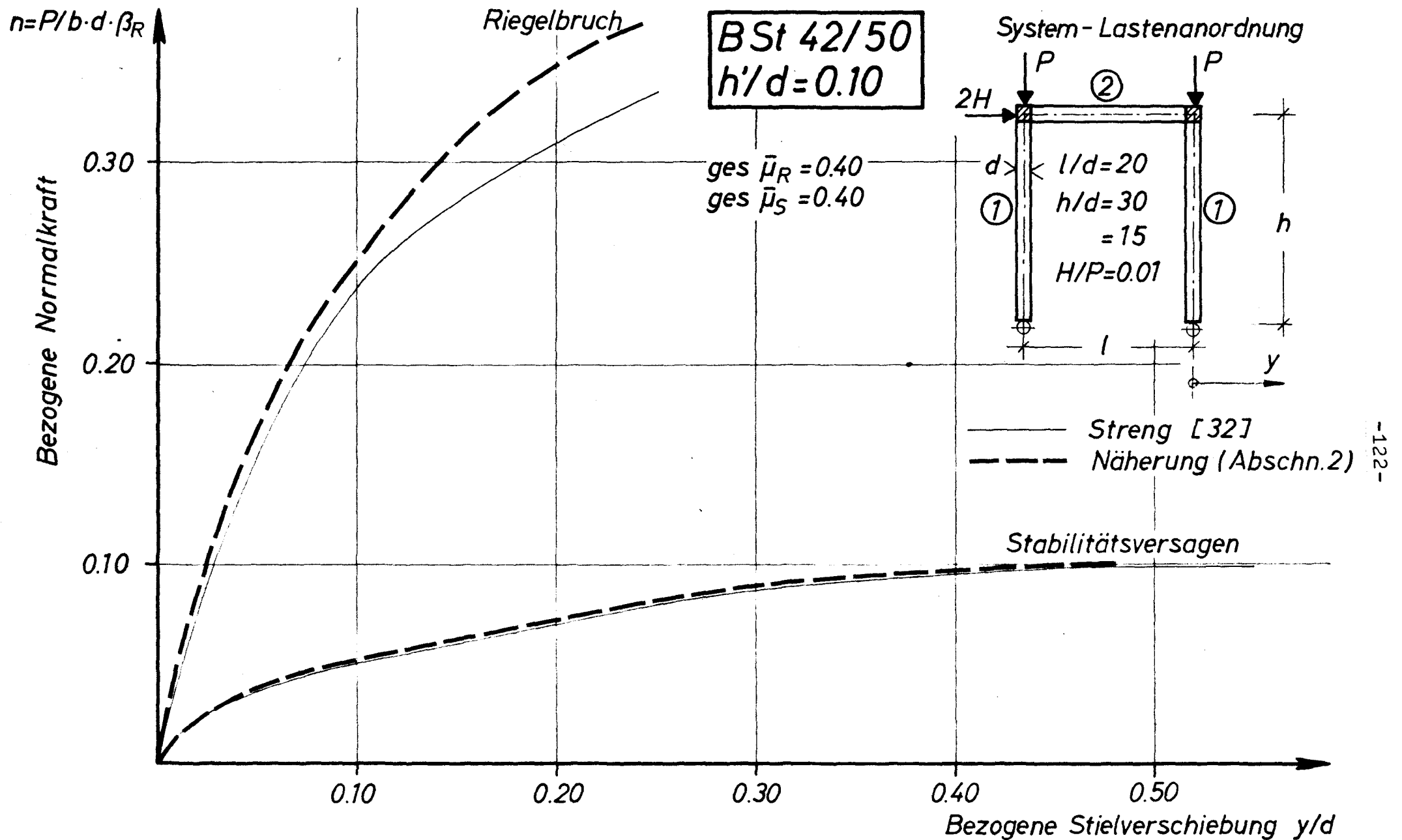
Ergänzend zu den Steifigkeitsuntersuchungen wird noch der durch die Anwendung "wirksamer Stabsteifigkeiten" entstehende Fehler in der inelastischen Grenzlast anhand einiger Vergleichsbeispiele ermittelt. Zum Vergleich wird ein Einfeldsystem streng nach [32] und näherungsweise nach Abschnitt 2 untersucht. Die Lastverschiebungskurven aus beiden Berechnungen sind in Bild 3.32 gegenübergestellt. Das Bild zeigt, daß die Anwendung konstanter, integrierter "wirksamer Stabsteifigkeiten" das grundsätzliche Last-Verformungsverhalten gut wiedergeben kann. Die aufgetretenen Abweichungen in den Biegemomenten nach Theorie II. Ordnung blieben, auf den strengen Wert bezogen, unter 10%, die entsprechenden Grenzlasten unterschieden sich um weniger als 6%.

(Zur rechnerischen Ermittlung der Lastverschiebungskurven nach Abschnitt 2 wurde wie folgt vorgegangen: Aus Gl.(2.21) bis (2.22) läßt sich unter Berücksichtigung der Antimetrie ( $f_1 = f_2$ ) folgende Deformationsgleichung des Zweigelenkrahmens ableiten:

$$f \cdot \left[ (A_1 + B_1) \left( 1 - \frac{B_1}{A_1} \right) + A_2 + B_2 - \frac{(A_1 + B_1)^2 \left( 1 - \frac{B_1}{A_1} \right)^2}{(A_1 + B_1) \cdot \left( 1 - \frac{B_1}{A_1} \right) - P \cdot h} \right] =$$

$$= \frac{(A_1 + B_1) \left( 1 - \frac{B_1}{A_1} \right)}{(A_1 + B_1) \cdot \left( 1 - \frac{B_1}{A_1} \right) - P \cdot h} \cdot H \cdot h$$

Aus der Knotenverdrehung lassen sich dann die weiteren Verformungsgrößen und Schnittkräfte bestimmen.)



**Bild 3.32 Vergleich angenäherter und strenger Lastverschiebungsbeziehungen**



### 3.4 Näherungsansatz zur Bestimmung der "wirksamen Stabsteifigkeiten"

Die Durchführung einer Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung zum Zwecke eines Stabilitätsnachweises erfordert die Kenntnis der beanspruchungsabhängigen "wirksamen Stabsteifigkeiten" des Systems. Die genauen Werte dieser Steifigkeiten lassen sich naturgemäß nur iterativ im Rahmen einer Verformungsrechnung bestimmen. Es ist jedoch denkbar, solche Größen bei Vorgabe der Beanspruchungszustände - die nach Ermessen bei üblichen Rahmensystemen vorkommen - "vorweg" zu bestimmen und anschließend die Gesetzmäßigkeiten mittels möglichst einfacher analytischer Ausdrücke zu beschreiben.

Auf diesem Wege wurden die in den Bildern 2.9 bis 2.12 dargestellten Querschnitt-(Bild 2.9) und Stabsteifigkeiten (Bilder 2.10 bis 2.12) schon in Abschnitt 2.2.5 errechnet. In den Stäben befindet sich jeweils ein Querschnitt (im Falle vollkommener Symmetrie oder Antimetrie der Biegemomente sind es zwei Querschnitte) im Bruchzustand, wobei auf einen möglichen Stabilitätsbruch zunächst keine Rücksicht genommen werden konnte. (Die Rechnung ist ohne Berücksichtigung von Stabausbiegungen durchgeführt worden). Die Bilder 2.9 bis 2.12 bieten folgende Erkenntnisse:

- 1) Der unstetige Verlauf der Querschnittssteifigkeiten (Bild 2.9) wird durch die Integration bei der Bestimmung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" weitgehend ausgeglichen. Dies ist eine - in Abschnitt 2.2.5 bereits diskutierte - durch die Näherung erlangte Vereinfachung.
- 2) Die "wirksamen Stabsteifigkeiten" weisen nur eine verhältnismäßig geringe Abhängigkeit von der Völligkeit der Momentenfläche auf, wenn die M-Fläche wenigstens eine Nullstelle besitzt.
- 3) Die Steifigkeiten ändern sich mit dem Bewehrungsgrad ( $\bar{\mu}$ ) annähernd linear und mit dem axialen Beanspruchungsgrad ( $\nu$ ) annähernd quadratisch.

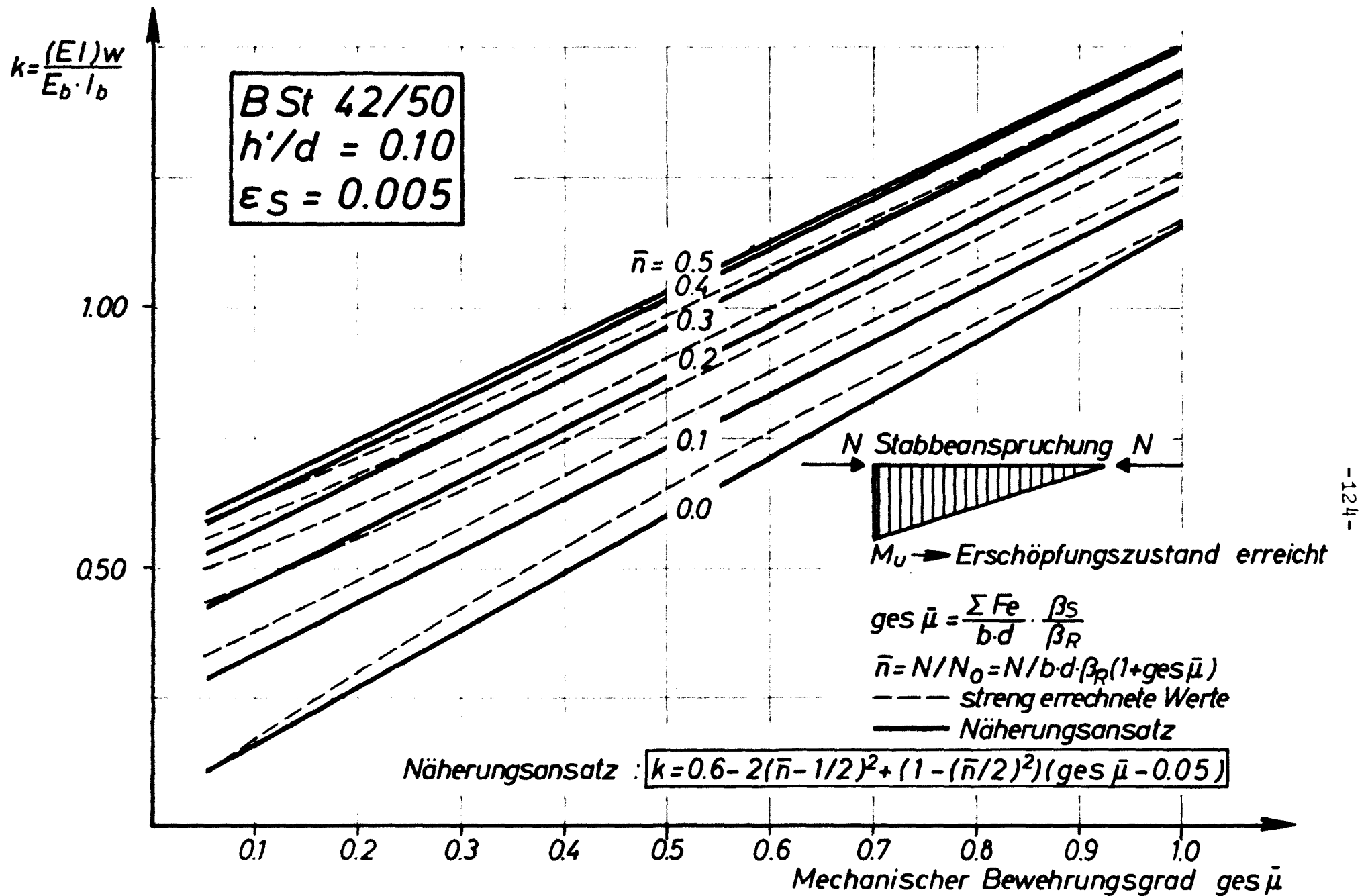
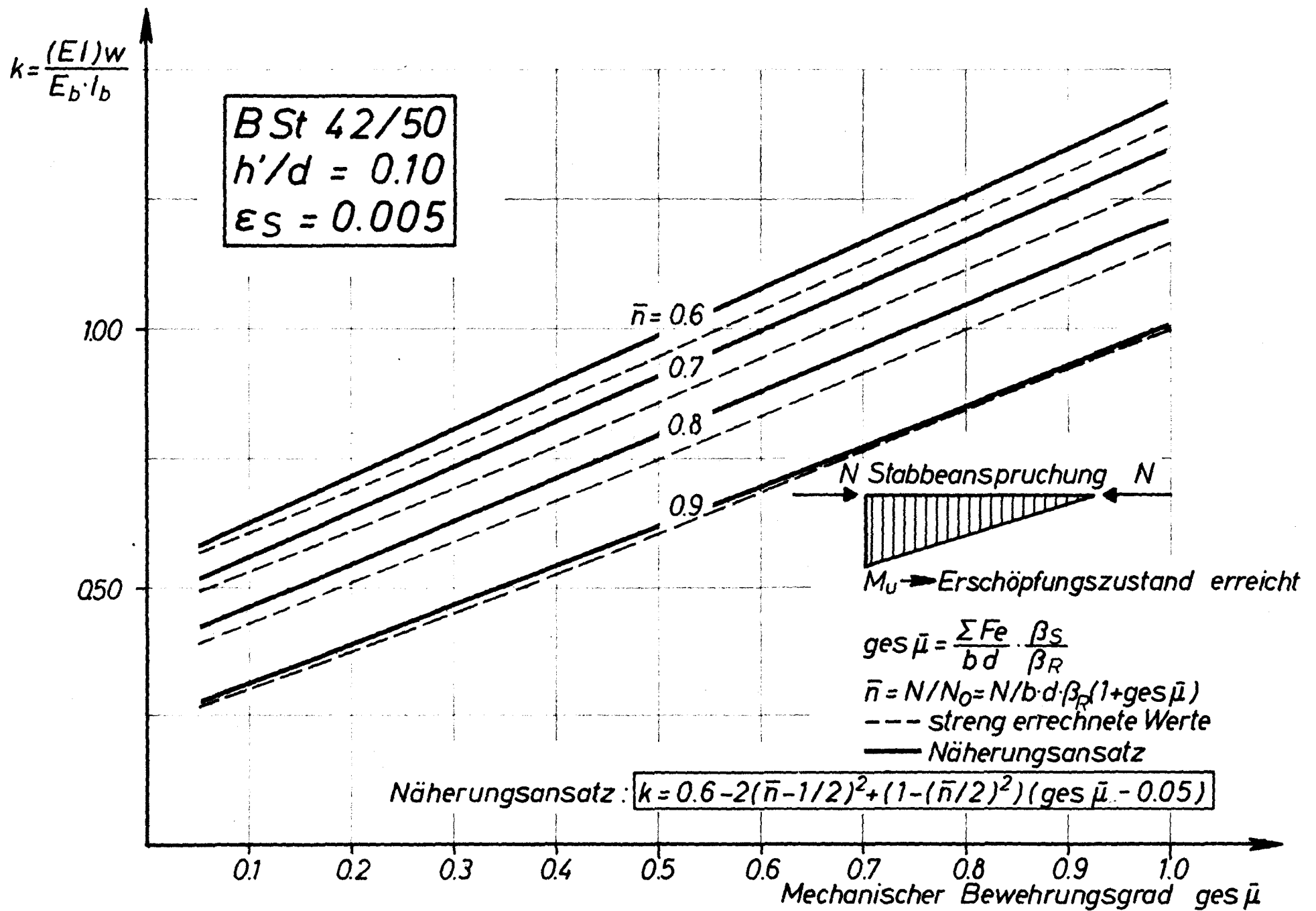
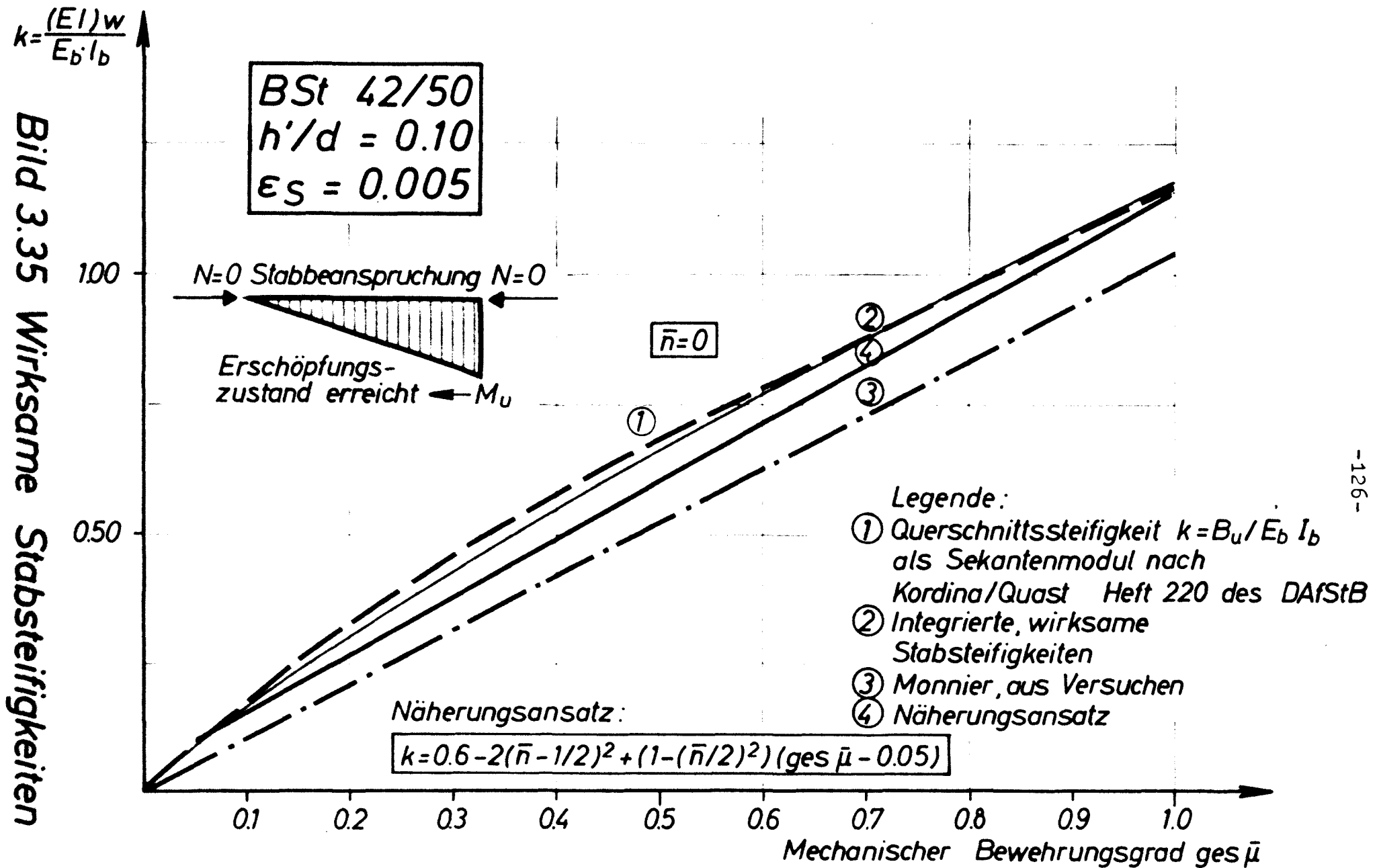


Bild 3.33 Wirksame Stabsteifigkeiten. Strenge Rechnung und Näherung



**Bild 3.34 Wirksame Stabsteifigkeiten. Strenge Rechnung und Näherung**



Unter Berücksichtigung dieser Feststellungen wurde folgender Ansatz zur näherungsweisen Bestimmung "wirksamer Stabsteifigkeiten" gefunden:

$$k = \frac{(EI)_w}{E_b I_b} = 0,6 - 2(\nu - 0,5)^2 + (1 - 0,25\nu^2)(\bar{g}_{es} - 0,05) \quad (3.15)$$

Der Näherungsansatz ist für die Bewehrungslage von  $h/d = 0,9$  und eine dreieckförmige Momentenverteilung aufgestellt worden. Diese Annahmen entsprechen den mittleren Verhältnissen verschieblicher Rahmenstiele.

Ein Vergleich berechneter und nach Gl.(3.5) angenäherter "wirksamer Stabsteifigkeiten" ist den Bildern 3.33 bis 3.35 zu entnehmen. Die Übereinstimmung ist gut, die maximalen Abweichungen liegen um 5 %.

Im Sonderfall Biegestab sind noch Versuchsauswertungen von MONNIER [41a] und Rechenwerte von KORDINA/QUAST [31] den Näherungswerten der Biegesteifigkeiten gegenübergestellt worden. Die Werte aus [41a] sind bei ausgeprägtem Stahlfließen und zugehörigen großen Verformungen an Biegebalken bestimmt worden. Die Steifigkeiten aus [31] wurden vom Verfasser als Sekantenmodul der dort verwendeten angenäherten Momentenkrümmungsbeziehungen angenommen ( $EI = M_u / K_u$ ).

Der Vergleich zeigt, daß die angenäherten "wirksamen Stabsteifigkeiten" zwischen den Versuchswerten und den als Sekantenmodul der M-K Beziehung definierten Rechenwerten liegen. Die systematischen Abweichungen der Versuchswerte lassen auf die Unvollkommenheit der Rechenannahmen schließen. Die geringere Biegesteifigkeit kann einerseits mit der zunehmenden Bedeutung der Schubverformungen in der Nähe des Bruchzustandes erklärt werden; andererseits beinhalten die Untersuchungen von Monnier verschiedene, von einer symmetrischen Bewehrungsanordnung abweichende Druckbewehrungsprozeßsätze. Die maximale Abweichung zwischen den näherungsweise bestimmten "wirksamen Stabsteifigkeiten"

und der von Monnier aus den Ergebnissen von Versuchswerten abgeleiteten Formel beträgt etwa 12 %. Die aus [31] abgeleiteten Nennsteifigkeiten könnten - nach Bild 3.35 - ebenso wie die "wirksamen Stabsteifigkeiten" nach leichter Modifikation Verformungsrechnungen zugrunde gelegt werden. Die einfache Handhabung des Näherungsansatzes bietet jedoch praktische Vorteile.

#### 4. Interaktion der Tragfähigkeit der Riegel und Stiele eines Rahmenknotens

---

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das Traglastproblem verschieblicher Stockwerkrahmen unter Kurzzeitlasten mittels Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung näherungsweise gelöst. Die errechneten Ergebnisse weisen auf die Wichtigkeit einzelner Einflußgrößen hinsichtlich der Tragfähigkeit des Gesamtsystems (z.B. Riegelbewehrung) hin. Obwohl das entwickelte analytisch-numerische Näherungsverfahren zur Rationalisierung der Grenzlastbestimmung gegenüber rein numerischen Rechenverfahren führte, werden einer direkten, praktischen Anwendung durch die noch nicht in genügender Anzahl vorhandenen, zugänglichen Rechenkapazitäten gewisse Grenzen gesetzt.

Es erscheint deshalb notwendig, Nachweis- bzw. Bemessungsverfahren zu suchen, die einerseits einfach auf Handrechnung abgestellt sind, andererseits das integrierte System einschließlich Interaktion der Riegel und Stiele erfassen. Im folgenden wird die Tragfähigkeit von idealisierten Rahmenknoten mit dem Ziel der Bestimmung einer "stabilisierenden" Riegelbewehrung untersucht. Grundgedanke des Nachweises ist folgender:

In einem idealisierten, aus einem Riegel und einem Stiel bestehenden Rahmenknoten genügt eine einzige Bedingung, nämlich die des Momentengleichgewichts, um einen definierten Zusammenhang zwischen der Tragkapazität des Riegels und Stiels herzustellen. Dabei dürfen die Knotenverformungen unbekannt bleiben. Strebt man nämlich im Interesse einer optimalen Bemessung an, daß Stiel und Riegel gleichzeitig versagen sollen, so gilt für die beiden Stabendmomente am Knoten im Traglastzustand

$$M_{RU} = M_{SU} \quad (4.1)$$

Diese Gleichung gilt unter der Voraussetzung, daß die Versagensquerschnitte beider Stäbe am Knoten liegen.

Bei gewöhnlichen Belastungsarten gilt diese Bedingung für Riegel meistens, für Stiele ohne Querlasten immer, da die maximalen Biegemomente auch am verformten System an den verschieblichen Stielenden auftreten.

#### 4.1 Analytisch angenäherte Interaktionskurven der Bruchschnittgrößen von den Stäben eines idealisierten Rahmenknotens


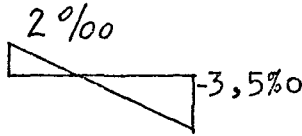
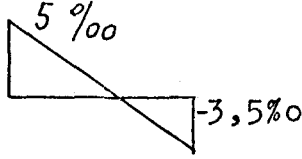
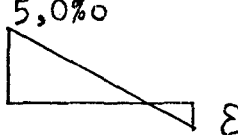
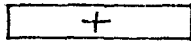
Die Tragkapazität der Riegel und Stiele konstanten Querschnitts und konstanter, symmetrischer Bewehrung kann in Form von Interaktionskurven nach Bild 4.1 dargestellt werden. (Rechenannahmen nach Bild 4.2). Die Berechnung solcher Interaktionskurven erfordert jedoch einen verhältnismäßig hohen Rechenaufwand, der meist nur unter Einsatz eines Computers zu bewältigen ist. Durch geeignete Vereinfachungen läßt sich der Rechenaufwand erheblich vermindern, und damit entsteht die Möglichkeit der Koppelung der Interaktionskurven beider Stäbe am Rahmenknoten.

Bild 4.3 zeigt zwei derart vereinfachte, gekoppelte Interaktionskurven für Riegel und Stiel des Knotens. Die Vereinfachung besteht darin, daß die errechnete Kurve mit Hilfe eines Polygons angenähert wird, dessen Eckpunktkoordinaten durch analytische Ausdrücke angegeben werden können. Der durch diese Näherung entstehende Fehler ist gering. (Entsprechend Bild 4.1 beträgt er weniger als 8 %). Bei Ableitung der Koordinatenausdrücke wurden einige, in den Rechenannahmen implizit vorhandene Vereinfachungsmöglichkeiten ausgenutzt, um zur Weiterverwendung möglichst einfache Formeln zu erhalten. Die Koppelung beider Interaktionskurven entsteht dadurch, daß das Versagensmoment des Riegels auf "reine Biegung" gleich dem des Stiels auf "Biegung mit Achsdruck" sein muß. (Für Riegel gilt  $N \approx 0$ ).

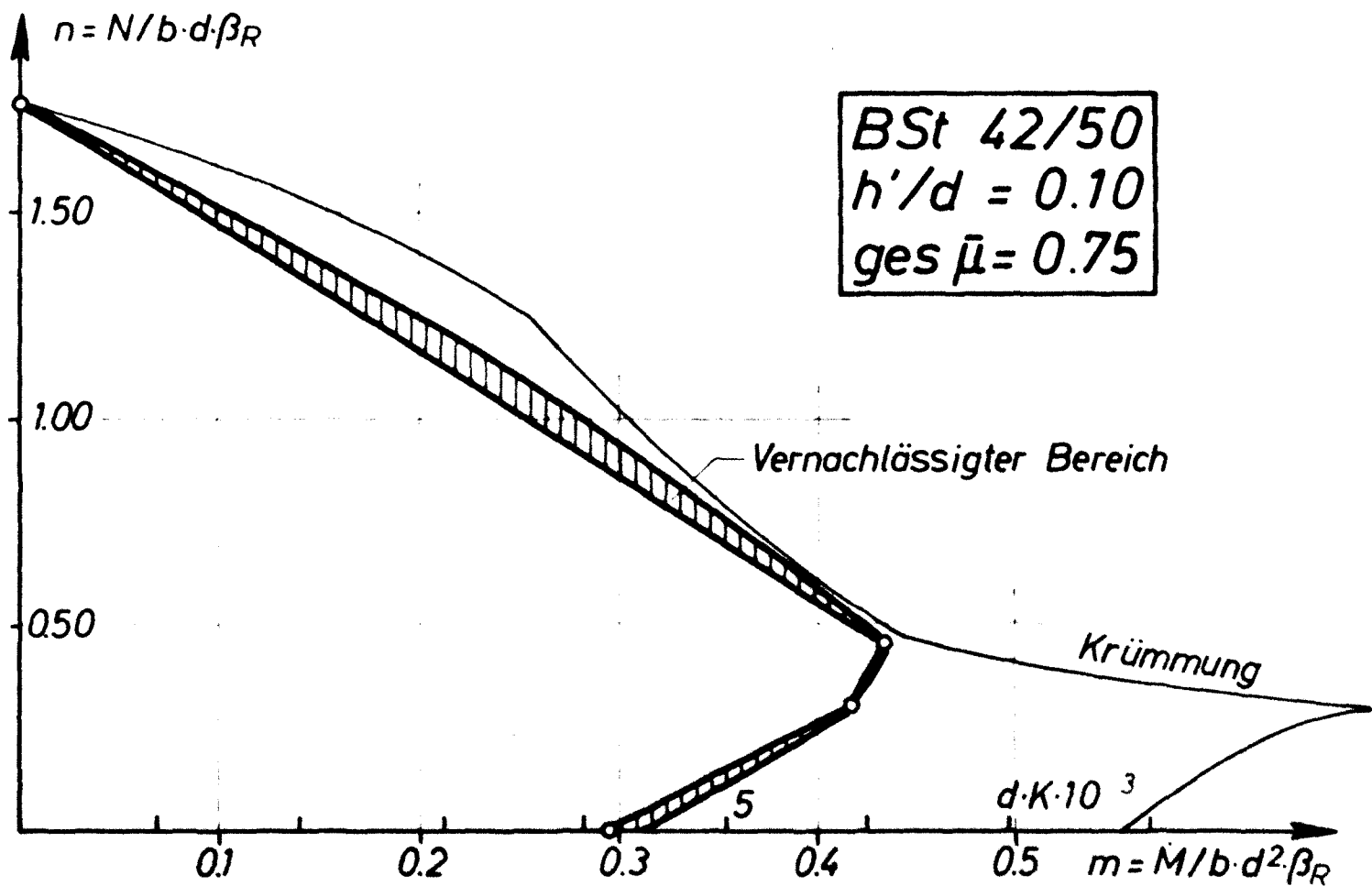
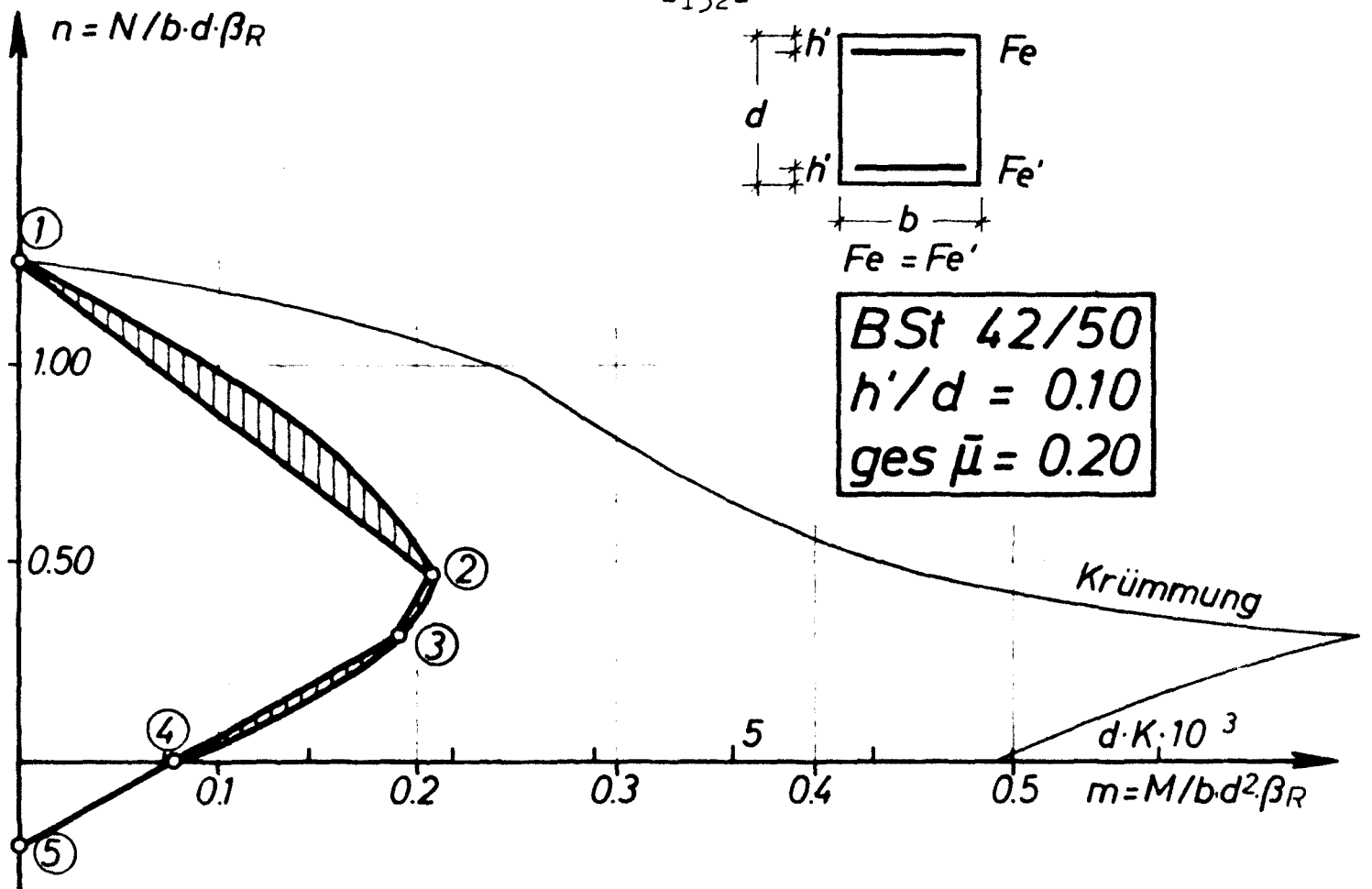
In der folgenden Tafel 4.1 werden die Koordinaten der Eckpunkte des Interaktionspolygons zusammengestellt (siehe Bild 4.3)



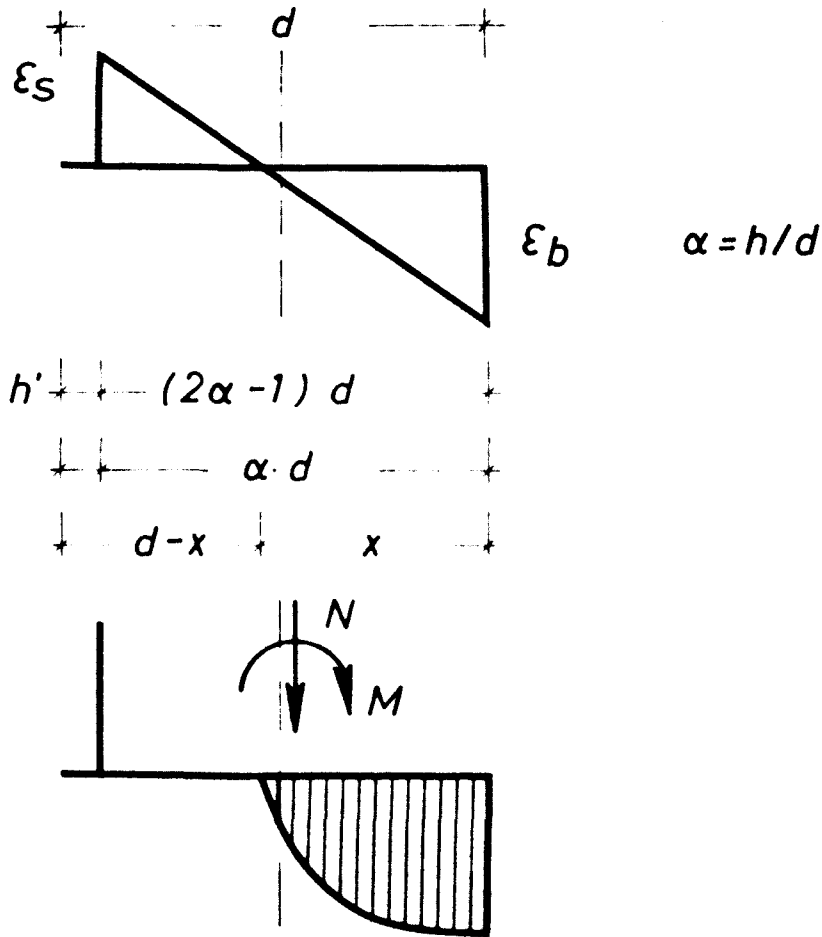
Tafel 4.1 Koordinaten des Interaktionspolygons

Punkt $i$	$n_i = N_i / b \cdot d \cdot \beta_R$	$m_i = M_i / b d^2 \beta_R$	Dehnungszustand
1	$1 + 2\bar{\mu}$	0	 -2‰
2	$\frac{17}{33} \cdot \frac{h}{d}$	$\frac{17}{66} \cdot \frac{h}{d} - \frac{33}{242} \left(\frac{h}{d}\right)^2 + (2h/d-1) \cdot \bar{\mu}$	
3	$\frac{1}{3} \frac{h}{d}$	$\frac{1}{6} \frac{h}{d} - \frac{33}{578} \left(\frac{h}{d}\right)^2 + (2h/d-1) \cdot \bar{\mu}$	
4	0	$2\bar{\mu} \frac{m_3}{n_3 + 2\bar{\mu}}$	
5	$2\bar{\mu}$	0	 + 2‰

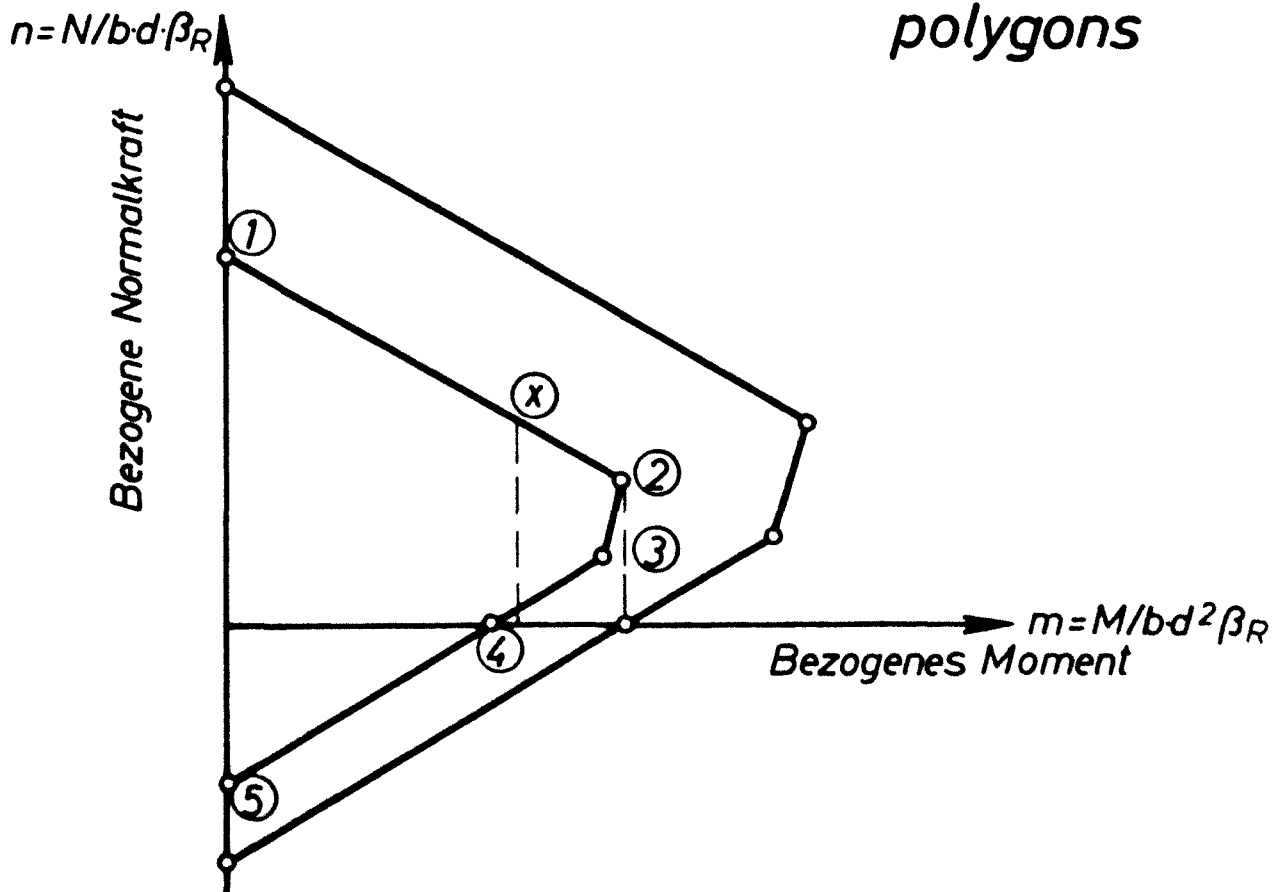
Sind die Momente und Krümmungen in den Eckpunkten des Interaktionspolygons bekannt, so lassen sich die zugehörigen Steifigkeiten einfach als deren Quotienten bestimmen. Ergänzend zu den Bruchschnittgrößen seien die Steifigkeiten in den wichtigen Punkten 2 und 3 nach Bild 4.3 wie folgt bestimmt:



**Bild 4.1 Vergleich strenger und angenäherter Interaktionskurven der Bruchschnittgrößen**



**Bild 4.2** Bezeichnungen zur Bestimmung der Koordinaten des Interaktionspolygons



**Bild 4.3** Interaktionspolygone für Rahmenstiel und Riegel

## Zu Punkt 2 (Tafel 4.1)

Die Querschnittssteifigkeit ist

$$EI_2 = \frac{M_2}{K_2} = \frac{m_2 \cdot b \cdot d^2 \cdot \beta_R}{5.5 \cdot 10^{-3} / h}$$

$$EI_2 = \frac{bd^3}{12} \left( \frac{24}{11} \alpha \cdot m \cdot \beta_R \cdot 10^3 \right) ; \quad \alpha = h/d$$

Da jedoch  $E_b = 1000 \cdot \beta_R$  Mp/m<sup>2</sup> ist (aus dem Parabel-Ansatz für die Arbeitslinie), kann die Steifigkeit auf folgende einfache Form gebracht werden:

$$k_2 = \frac{EI}{E_b I_b} = \frac{24}{11} \alpha m_2 \quad (4.1)$$

Auf ähnlichem Wege erhält man die Steifigkeit

## zu Punkt 3 (Tafel 4.1)

$$k_3 = \frac{EI}{E_b I_b} = \frac{24}{17} \alpha m_3 \quad (4.2)$$

### 4.2 Analytische Bestimmung einer stabilisierenden Riegelbewehrung des idealisierten Rahmenknotens

Aus der Bedingung gleichzeitigen Riegel- und Stielversagens nach Bild 4.3 ergibt sich folgende Beziehung:

$$m_{R4} \cdot d_R^2 \cdot b_R \cdot \beta_R = m_{S2} \cdot d_S^2 \cdot b_S \cdot \beta_R \quad (4.3)$$

Angenommen, daß die Breite beider Stäbe gleich ist,  $b_R = b_S$ , und gekürzt

$$m_{R4} \cdot d_R^2 = m_{S2} \cdot d_S^2 \quad (4.4)$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Koordinatenwerte nach Tafel 4.1 erhält man die folgende Bestimmungsgleichung für die erforderliche stabilisierende Riegelbewehrung:

$$2\bar{\mu}_R \frac{\frac{1}{6} \alpha_R - \frac{33}{578} \alpha_R^2 + (2\alpha_R - 1) \bar{\mu}_R}{\frac{1}{3} \alpha_R + 2\bar{\mu}_R} d_R^2 =$$

$$= \left[ \frac{17}{66} \alpha_S - \frac{33}{242} \alpha_S^2 + (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S \right] d_S^2 \quad (4.5)$$

Nach kurzer Zwischenrechnung und Umformung lässt sich die Bestimmungsgleichung der Riegelbewehrung in einfacher Form angeben:

$$\bar{\mu}_R^2 + C_1 \cdot \bar{\mu}_R - C_2 = 0 \quad (4.6)$$

Hierbei haben die Konstanten folgende Werte:

$$C_1 = \frac{C_R \cdot d_R^2 - C_S \cdot d_S^2 - (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S d_S^2}{d_R^2 (2\alpha_R - 1)} \quad (4.7)$$

$$C_2 = \frac{C_S \cdot \alpha_R \cdot d_S^2 + (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S \cdot d_S^2}{6d_R^2 (2\alpha_R - 1)}$$

und

$$C_R = \frac{1}{6} \alpha_R - \frac{33}{578} \alpha_R^2 \quad (4.8)$$

$$C_S = \frac{17}{66} \alpha_S - \frac{33}{242} \alpha_S^2$$

Die Konstanten  $C_R$  und  $C_S$  sind nur von der Bewehrungslage  $\alpha_R$  und  $\alpha_S$  abhängig.

Eine Auswertung der gewonnenen Gleichungen von der Interaktion der Riegel- und Stielbewehrungen ist in Bild 4.4 dargestellt. Es wurden alle wesentlichen, die Knotentragsfähigkeit beeinflussenden Parameter, nämlich

1) Verhältnis der Querschnittsflächen:  $\frac{d_R(\cdot b_R)}{d_S(\cdot b_S)}$

2) Bewehrungslagen  $\alpha_R; \alpha_S$

3) mechanische Bewehrungsgrade:  $\bar{\mu}_S, \bar{\mu}_R$

in Rechnung gestellt.

Bild 4.4 zeigt, daß besonders das Verhältnis  $d_R/d_S$  erheblichen Einfluß auf die Größe der stabilisierenden Riegelbewehrung ausübt. (Es ist dabei zu beachten, daß der mechanische Bewehrungsgrad  $\bar{\mu}$  immer auf die jeweilige Querschnittsfläche bezogen ist. Die Einsparung an erforderlicher Riegelbewehrung bei zunehmender Riegeldicke liegt damit niedriger, als dem Bild direkt zu entnehmen ist; dennoch ist sie erheblich.) Der Einfluß der Bewehrungslage  $\alpha$  ist im praktischen Bereich ( $\alpha \geq 0,80$ ) nur bei größeren Stielbewehrungsgraden  $\bar{\mu}_S$  bedeutend.

In den vorigen Ableitungen wurde die Koppelung beider am idealisierten Rahmenknoten liegenden Querschnitte mit Hilfe des maximal aufnehmbaren Biegemoments durch den Stiel (Punkt 2 im Interaktionspolygon) vorgenommen. Die erzielten Ergebnisse liegen immer auf der sicheren Seite. Liegt die Normalkraftbeanspruchung des Stiels wesentlich oberhalb oder unterhalb des "Balance Point" (Punkt 2), so erscheint es zweckmäßig, die Koppelungsstelle in den durch die axiale Beanspruchung  $n$  bestimmten Punkt  $x$  in Bild 4.3 zu verlegen. Die axiale Beanspruchung des Stiels ist als bekannt anzusehen, und das zugehörige Moment kann aus folgenden Beziehungen bestimmt werden:

$$m = \frac{1 + 2\bar{\mu}_S - n}{1 + 2\bar{\mu}_S - n_2} m_2 \quad (4.9)$$

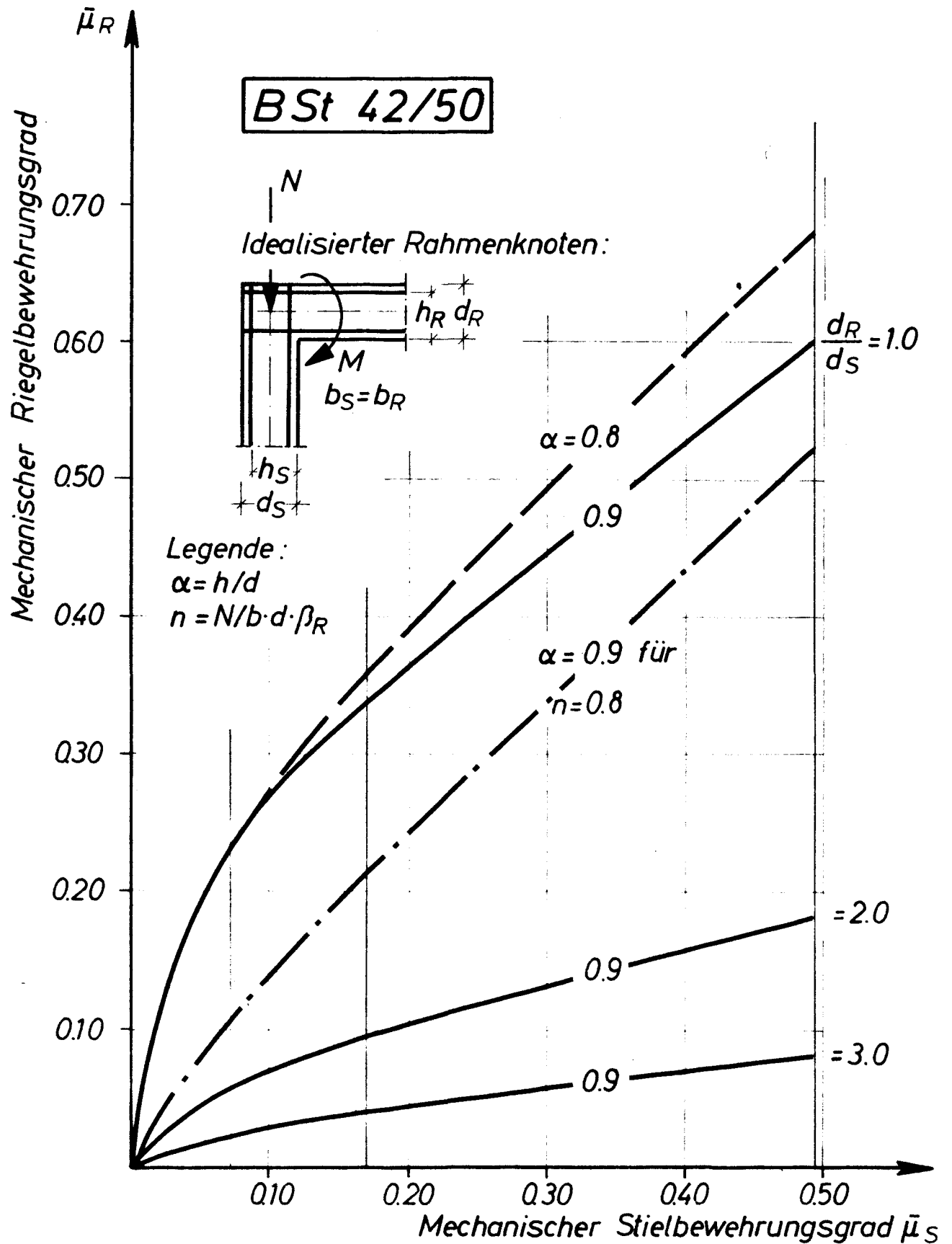
$$\text{wenn } n \geq \frac{17}{33} \alpha$$

und

$$m = \frac{2\bar{\mu}_S + n}{2\bar{\mu}_S + n_3} m_3 \quad (4.10)$$

$$\text{wenn } n \leq \frac{1}{3} \alpha$$

Zwischen den Punkten 2 und 3 ( $\frac{17}{33} \alpha > n > \frac{1}{3} \alpha$ ) gelten die schon abgeleiteten Beziehungen.



**Bild 4.4** Interaktion der Bewehrungen eines idealisierten Rahmenknotens

Die Bestimmungsgleichung (4.6) für die stabilisierende Riegelbewehrung bleibt unverändert bis auf die Konstanten, die folgende Form annehmen:

$$C_1^* = \frac{C_R \cdot d_R^2 - C_S \cdot d_S^{**2} - (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S \cdot d_S^{**2}}{d_R^2 (2\alpha_R - 1)} \quad (4.11)$$

$$C_2^* = \frac{C_S \cdot \alpha_R \cdot d_S^{**2} + (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S \cdot d_S^{**2}}{6d_R^2 (2\alpha_R - 1)}$$

$$\text{wenn } n \geq \frac{17}{33} \alpha$$

und

$$C_1^{**} = \frac{C_R \cdot d_R^2 - C_S^{**} d_S^2}{(2\alpha_R - 1) d_R^2} \quad (4.12)$$

$$C_2^{**} = \frac{\alpha_R \cdot C_S^{**} \cdot d_S^2}{6(2\alpha_R - 1) \cdot d_R^2}$$

$$\text{wenn } n \leq \frac{1}{3} \alpha$$

wobei

$$d_S^{**2} = \frac{1 + 2\bar{\mu}_S - n}{1 + 2\bar{\mu}_S - \frac{17}{33} \alpha_S} \cdot d_S^2 \quad (4.13)$$

und

$$C_S^{**} = \frac{(\frac{1}{6} \alpha_S - \frac{33}{578} \alpha_S^2 + (2\alpha_S - 1) \bar{\mu}_S)(n + 2\bar{\mu}_S)}{\frac{1}{3} \alpha_S + 2\bar{\mu}_S} \quad (4.14)$$

Die Anwendung der abgeleiteten Beziehungen soll an folgendem Beispiel erläutert werden:

### Beispiel

Es ist der idealisierte Rahmenknoten mit folgenden Ausgangsdaten zu dimensionieren:

Baustahl	$\beta_S = 42\,000 \text{ Mp/m}^2$
Beton	$\beta_R = 2\,550 \text{ Mp/m}^2$



Querschnitte	$d_R/b_R = 1,0/1,0 \text{ m}$
	$d_S/b_S = 1,0/1,0 \text{ m}$
Bewehrungslage	$\alpha_S = \alpha_R = 0,9$
Stielbewehrung	$\mu_S = \mu'_S = 1,0 \%$
Axiale Stielbeanspruchung	$n = N/b \cdot d \cdot \beta_R = 0,80 > \frac{17}{33} \alpha$
Mechanischer Bewehrungsgrad des Stiels	$\bar{\mu}_S = \bar{\mu}'_S = \mu_S \frac{\beta_S}{\beta_R} = 0,165$

Vorwerte:

$$d_S^{**} = \frac{1 + 2 \cdot 0,165 - 0,80}{1 + 2 \cdot 0,165 - \frac{17}{33} 0,9} = 0,61$$

$$C_1^{**} = \frac{0,104 - 0,122 \cdot 0,61 - 0,8 \cdot 0,165 \cdot 0,61}{0,8} = -0,064$$

$$C_2^{**} = \frac{0,122 \cdot 0,9 \cdot 0,61 + 0,8 \cdot 0,165 \cdot 0,61}{6 \cdot 0,8} = 0,0307$$

(wobei

$$C_S = \frac{17}{66} 0,9 - \frac{33}{242} 0,9^2 = 0,122$$

$$C_R = \frac{1}{6} 0,9 - \frac{33}{578} 0,9^2 = 0,104 \text{ ist}).$$

Die erforderliche Riegelbewehrung

$$\bar{\mu}_R = 0,0318 + \sqrt{0,00101 + 0,0307} = 0,210$$

$$\mu_R = \mu'_R = 1,27 \%$$

=====

#### 4.3 Vorschlag für eine direkte Bemessung

Im vorigen Abschnitt ist die Bemessung eines idealisierten Rahmenknotens - ohne Durchführung einer Verformungsrechnung - dadurch ermöglicht worden, daß ein gleichzeitiges Materialversagen beider Stabenden vorausgesetzt wurde. Diese Voraussetzung gilt bei kleineren und liegt auf der sicheren Seite bei größeren Stielschlankheiten. Wird nämlich die Systemtraglast durch Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung erreicht, so kann die Tragfähigkeit des Stielquerschnitts nicht voll ausgenutzt werden.

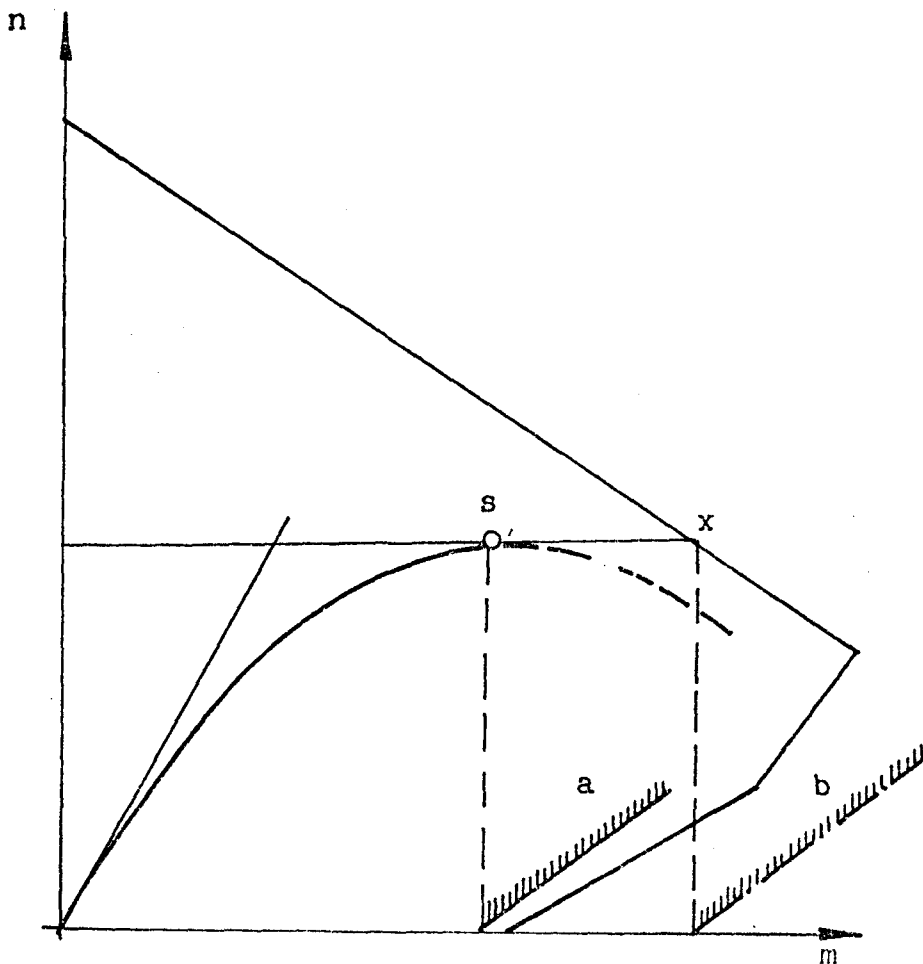


Bild 4.5    Erforderliche stabilisierende Riegelbewehrung

Dies ermöglicht auch eine Abminderung der "stabilisierenden Riegelbewehrung" nach Bild 4.5. Die Bestimmung der Koordinaten des 'Stabilitätspunktes' S in diesem Bild kann jedoch nur mit Hilfe einer Verformungsrechnung - z.B. nach Abschnitt 2 und 3 - vorgenommen werden. Die genaue Kenntnis der Lage dieses Punktes ist jedoch meist gar nicht erforderlich, es genügt der Nachweis eines Gleichgewichtszustandes unter um einen Sicherheitsbeiwert erhöhten Lasten am verformten System. Um einen solchen Nachweis mit verhältnismäßig geringem Rechenaufwand durchführen zu können, ist es zweckmäßig, ein vereinfachtes, aber typisches Ersatzsystem der Berechnung zugrunde zu legen. Ein solches System könnte - nach Erfahrungen aus Abschnitt 3 - das in Bild 4.6 dargestellte sein. Nachfolgend soll eine vereinfachte Verformungsrechnung am gewählten Ersatzsystem durchgeführt werden unter der Voraussetzung bekannter "wirksamer Stabsteifigkeiten" mit dem Ziel, die Stabendmomente am Rahmenknoten nach Theorie II. Ordnung zu bestimmen und der Bemessung zugrunde zu legen.

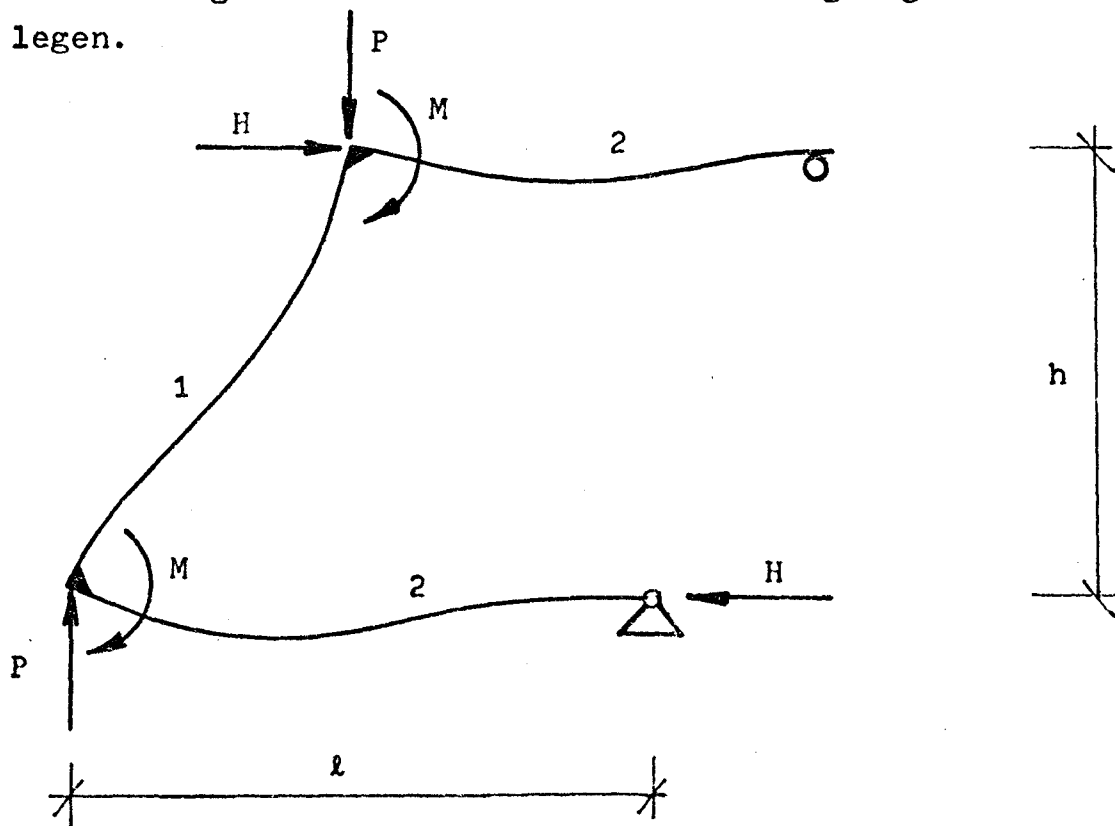


Bild 4.6 Ersatzsystem zur direkten Bemessung

Aus Gln.(3.7) und (3.8) in Abschnitt 3 folgt:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = A_1 + A_2 - \frac{C_1^2}{2C_1 - P \cdot h} \quad (4.15)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = B_1 - \frac{C_1^2}{2C_1 - P \cdot h} \quad (4.16)$$

$$\alpha_0 = \frac{H \cdot h \cdot C_1}{2C_1 - P \cdot h} - M \quad (4.17)$$

Die Knotenverdrehung beträgt dann:

$$\varphi = \left( \frac{H \cdot h \cdot C_1}{2C_1 - P \cdot h} - M \right) \frac{1}{C_1 + A_2 - 2C_1^2 / (2C_1 - P \cdot h)} \quad (4.18)$$

Nach Umformung

$$\varphi = \frac{H \cdot h}{2A_2 - P \cdot h(1 + A_2/C_1)} - \frac{M}{A_2 + C_1 - 2C_1^2 / (2C_1 - P \cdot h)} \quad (4.19)$$

Das Stielmoment nach Theorie II. Ordnung wird zu

$$M_S = \varphi \cdot A_2 \quad (4.20)$$

$$= \frac{H \cdot h}{2 - P \cdot h(1/A_2 + 1/C_1)} - \frac{M}{1 + C_1/A_2 - 2C_1^2 / (2C_1/A_2 - Ph/A_2)} \quad (4.20)$$

In Abschnitt 3.2.3 ist gezeigt worden, daß für einen verschieblichen Rahmenstiel der größte Anteil der Biegebeanspruchung aus den Horizontallasten resultiert; es ist daher in den meisten Fällen ausreichend, das erste Glied der Gl.(4.20) allein zu berücksichtigen. Nach Einsetzen der Werte  $A_2$  und  $C_1$  aus Gl. (2.23) in Gl.(4.20) vereinfacht sich der Ausdruck für das Stabendmoment zu:

$$M_S = M_R = \frac{H \cdot h}{2 - P \cdot h(l/4EI_R + h/(\alpha + \beta) \cdot EI_S)} \quad (4.21)$$

wobei  $EI_R$  und  $EI_S$  "wirksame Stabsteifigkeiten" bedeuten und  $\alpha, \beta$  aus dem bekannten Tafelwerk von CHWALLA [14] oder nach Gl.(2.23) einzusetzen sind. Die Gl.(4.21) gilt bei positiven Werten des Nenners. Wird er zu Null, so erhält man unendlich große Stabendmomente, d.h. Stabilitätsversagen.

Im folgenden Beispiel soll die Richtigkeit und Brauchbarkeit der Gl. (4.21) mittels einer Nachrechnung entsprechend Bild 3.16 überprüft werden:

$$\begin{aligned} H/P &= 0,01 && \text{(aus einem Vergleichsbeispiel in Bild 3.16)} \\ h/d &= 20 \\ h=l &= 2,80 \text{ m} \\ P_k &= 38,0 \text{ Mp} \\ H_k &= 0,38 \text{ Mp} \\ E_b I_b &= 93,2 \\ K_R &= (2 \cdot 123,7 + 84,0) / 93,2 = 3,54 \\ K_S &= 67,2 / 93,2 = 0,72 \\ M_S &\approx 1,16 \text{ Mp/m} \end{aligned}$$

Nachrechnung:

$$\epsilon = 2,8 \sqrt{38,0 / 67,2} = 2,10$$

aus den Chwalla-Tafeln [14]

$$\alpha + \beta = 5,544$$

$$M_S = \frac{0,38 \cdot 2,80}{2 - \frac{38,0 \cdot 2,8}{93,20} \left( \frac{2,80}{3,54 \cdot 4} + \frac{2,80}{0,72 \cdot 5,544} \right)} = 1,08 \text{ Mpm}$$

Die Abweichung vom exakten, programmgesteuert errechneten Wert beträgt:

$$\Delta \% = \frac{1,16 - 1,08}{1,16} 100 = 6,9 \% \quad \text{=====}$$

Das gewählte Ersatzsystem ist geeignet zur näherungsweisen Bestimmung der Stabendmomente des Rahmenknotens nach Theorie II. Ordnung.

Das Moment  $M_S = M_R$  ermöglicht dann eine gleichzeitig durchgeführte, direkte Bemessung des Rahmenknotens. Die Genauigkeit der Momentenbestimmung hängt von der Vorschätzung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" ab. Diese können jedoch mit ausreichender Genauigkeit und auf der sicheren Seite liegend nach Abschnitt 3.4 bestimmt werden.

Die obigen Abweichungen gelten für ein verschiebliches Ersatzsystem, im Falle von Unverschieblichkeit können ähnlich einfache Formeln zur Bestimmung der Anschnittmomente abgeleitet werden. Ausgehend von den Gln. (3.7) und (3.8) erhält man die Stabendmomente am Rahmenknoten für zwei Grenzfälle nach Abschnitt 3.2.2 aus folgenden Beziehungen:

"Standardstab"

$$M_S = M \frac{A_1 - B_1}{\sum_{k=1}^2 A_k - B_1} \quad (4.22)$$

"Zimmermannsstab"

$$M_S = M \frac{A_1 + B_1}{\sum_{k=1}^2 A_k + B_1} \quad (4.23)$$

Es sei betont, daß diese Stabendmomente nach Theorie II. Ordnung in einem unverschieblichen System kleiner sind als die nach Theorie I. Ordnung. Das zu berücksichtigende Zusatzmoment für den Riegel entsteht also nicht am Knoten, sondern gegen die Feldmitte.

## 5. Kritische Betrachtungen über mögliche und praktische Nachweisverfahren der Stabilität von Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

---

### 5.1 Anwendbarkeit des "Ersatzstabverfahrens"

Die Traglastbestimmung mehrfach zusammengesetzter Systeme wie Stockwerkrahmen - erfordert einen verhältnismäßig hohen Rechenaufwand, der meist nur unter Einsatz elektronischer Rechenanlagen zu bewältigen ist. Folglich ist ein Stabilitätsnachweis solcher Systeme in Verbindung mit der Traglast nur dann vertretbar, wenn die entsprechenden personellen und maschinellen Voraussetzungen erfüllt sind.

Dies ist heutzutage auch der Fall bei den meisten großen Baufirmen und Konstruktionsbüros; dennoch verlangt die Bau Praxis in der Mehrzahl der Fälle - insbesondere für das Entwerfen - einfachere, handlichere Nachweisverfahren.

Ein solches, weitgehend vereinfachtes Verfahren ist das "Ersatzstabverfahren". Im folgenden soll seine Anwendbarkeit auf den Nachweis der Stabilität von Stockwerkrahmen überprüft werden.

Das "Ersatzstabverfahren", so wie es in den neuesten Stahlbetonvorschriften enthalten ist, (vergl. z.B. [31][40]) besteht aus drei wesentlichen Berechnungsteilen, nämlich:

- 1) Bestimmung der Ersatzlänge (Knicklänge) des zu dimensionierenden Druckstabes mit Hilfe elastizitätstheoretischer Verzweigungslasten des Gesamtsystems.
- 2) Berechnung der Schnittkräfte nach Theorie I. Ordnung, ebenfalls auf elastizitätstheoretischen Grundlagen.  
Errechnen einer konstanten, planmäßigen Ersatzausmitte.
- 3) Bemessung auf der Grundlage einer inelastischen, wirklichkeitsnahen Verformungsrechnung des durch die Ersatzlänge und Ersatzausmitte definierten Standardstabes.

Die Näherung des "Ersatzstabverfahrens" besteht im wesentlichen in folgendem:

- a) Die Ersatzlänge wird durch last-und materialunabhängige Stabsteifigkeiten ermittelt und entspricht daher nicht dem Verhalten des Stahlbetons.
- b) Die Abhängigkeit der Stieltragfähigkeit vom Schnittkraftverlauf durch die näherungsweise bestimmte Ersatzausmitte kann nur beschränkt erfaßt werden.
- c) Die Bemessung des Rahmenstiels wird unabhängig von den zugehörigen Rahmenknoten durchgeführt, und eine Zusatzbeanspruchung des Riegels wird geschätzt. (In der neuen DIN 4224 werden allerdings Hilfsmittel zur näherungsweise Bestimmung eines aus dem Standardstab abgeleiteten Zusatzmomentes bereitgestellt.)

In den folgenden Untersuchungen wird versucht zu klären, inwieweit die obigen Näherungen die rechnerische Tragfähigkeit von Rahmenstielen beeinflussen. Zu diesem Zweck werden Grenzlaster nach Abschnitt 3 mit denen eines "Standardstabes" aus Tafel 5.1 verglichen. Die Vergleichbarkeit beider Traglastarten wird mit Hilfe programmgesteuert errechneter Knicklängenbeiwerte für die Rahmenstiele herbeigeführt. (Siehe Abschnitt 3.2.1).

In Bild 4.7 wurde zunächst ein Rahmen mit mittelmäßig bewehrten Riegeln ( $\bar{\mu}_k = \bar{\mu}_R' = 0,165$ ) starker geometrischer Aussteifung ( $e/d = 10$ ) und geringer Stielbewehrung ( $\bar{\mu}_S = \bar{\mu}_S' = 0,067$ ) untersucht, und die Rahmentraglasten wurden denen des "Standardstabes" gegenübergestellt.

Bild 4.7 vermittelt folgende Erkenntnisse:

- 1) Verschiebliche Rahmenstiele in einem geometrisch und bewehrungsmäßig ausreichend ausgesteiften System können mit genügender Sicherheit nach dem "Ersatzstabverfahren" bemessen werden. Die Abweichungen zwischen Rahmentraglast und Tragfähigkeit nach dem "Ersatzstabverfahren" betragen:

- a) bis etwa  $\pm 7\%$ , wenn  $e/d \leq 0,05$
- b) bis etwa  $- 35 \%$ , wenn  $e/d \geq 0,05$

Die negativen Werte liegen auf der sicheren Seite.



ges $\bar{\mu}$ = 0,132		h/d					
e/d	0	10	20	30	40	50	60
0.0000	-1.1171	-1.0991	-0.9462	-0.6746	-0.4495	-0.3104	-0.2283
-0.0500	-0.9931	-0.9205	-0.7441	-0.5192	-0.3399	-0.2269	-0.1584
-0.1000	-0.8873	-0.8064	-0.6252	-0.4069	-0.2568	-0.1637	-0.1054
-0.2000	-0.6984	-0.6123	-0.4255	-0.2467	-0.1492	-0.0958	-0.0649
-0.3000	-0.5456	-0.4616	-0.2938	-0.1709	-0.1055	-0.0704	-0.0498
-0.4000	-0.4204	-0.3375	-0.2103	-0.1301	-0.0860	-0.0601	-0.0440
-0.5000	-0.3121	-0.2436	-0.1576	-0.1045	-0.0727	-0.0528	-0.0399
-0.7500	-0.1501	-0.1265	-0.0939	-0.0697	-0.0528	-0.0410	-0.0324
-1.0000	-0.0939	-0.0818	-0.0661	-0.0523	-0.0418	-0.0337	-0.0274

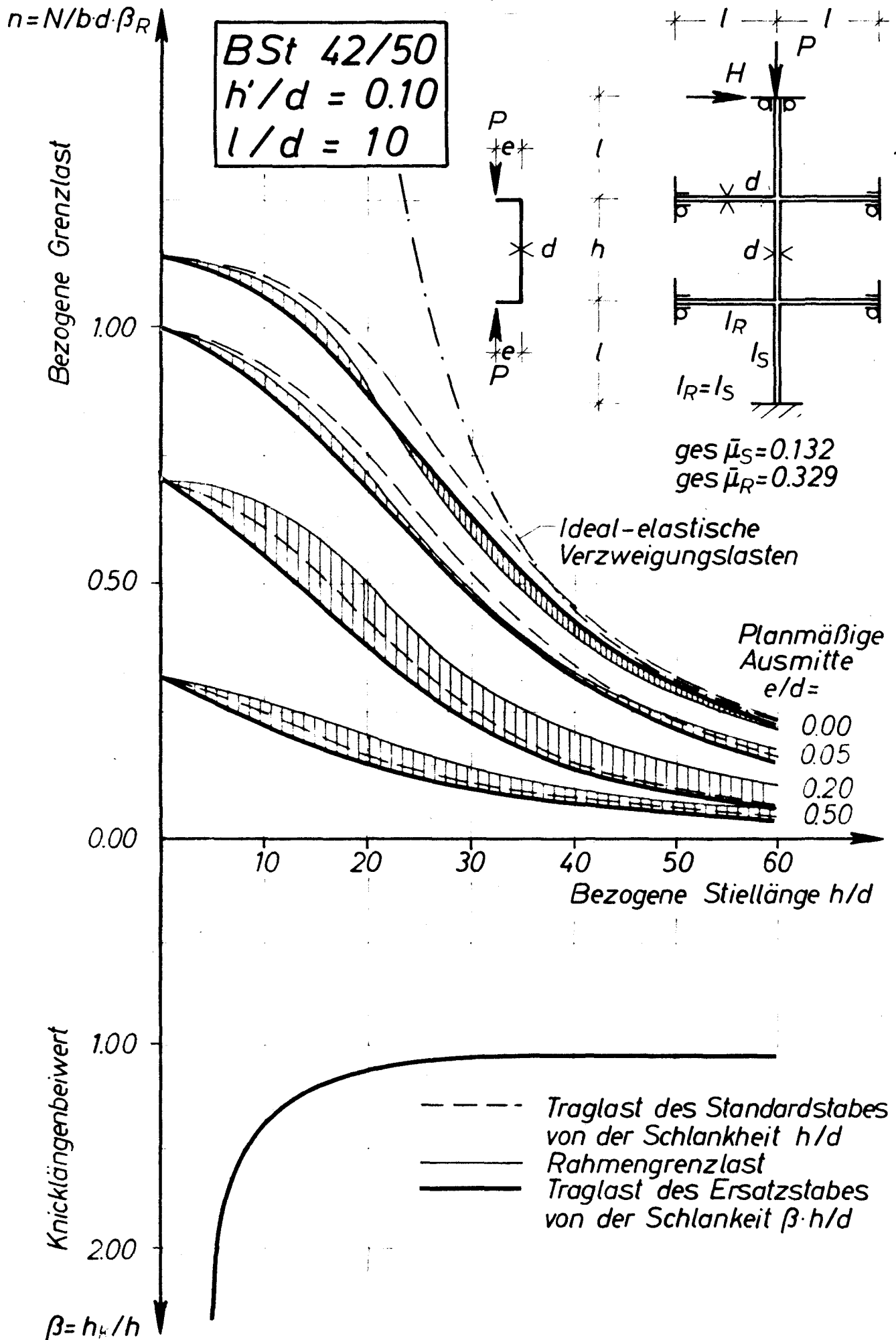
ges $\bar{\mu}$  = 0,329

0.0000	-1.2920	-1.2866	-1.1480	-0.8167	-0.5397	-0.3693	-0.2664
-0.0500	-1.1624	-1.0893	-0.8942	-0.6376	-0.4171	-0.2794	-0.1951
-0.1000	-1.0446	-0.9614	-0.7667	-0.5212	-0.3318	-0.2205	-0.1516
-0.2000	-0.8452	-0.7610	-0.5724	-0.3735	-0.2358	-0.1578	-0.1117
-0.3000	-0.6877	-0.6146	-0.4525	-0.2986	-0.1954	-0.1355	-0.0983
-0.4000	-0.5720	-0.5068	-0.3685	-0.2464	-0.1681	-0.1204	-0.0896
-0.5000	-0.4797	-0.4203	-0.3039	-0.2090	-0.1475	-0.1085	-0.0825
-0.7500	-0.3095	-0.2691	-0.2025	-0.1499	-0.1132	-0.0876	-0.0692
-1.0000	-0.2095	-0.1869	-0.1490	-0.1166	-0.0921	-0.0738	-0.0599

ges $\bar{\mu}$  = 0,988

0.0000	-1.8776	-1.8785	-1.8091	-1.2957	-0.8306	-0.5754	-0.4258
-0.0500	-1.7205	-1.6378	-1.3834	-1.0308	-0.6806	-0.4617	-0.3254
-0.1000	-1.5601	-1.4600	-1.2054	-0.8935	-0.5865	-0.3962	-0.2835
-0.2000	-1.3015	-1.1988	-0.9710	-0.7146	-0.4979	-0.3469	-0.2512
-0.3000	-1.0938	-1.0085	-0.8172	-0.6104	-0.4403	-0.3138	-0.2323
-0.4000	-0.9414	-0.8679	-0.7146	-0.5424	-0.3956	-0.2870	-0.2163
-0.5000	-0.8249	-0.7650	-0.6385	-0.4866	-0.3586	-0.2650	-0.2025
-0.7500	-0.6325	-0.5973	-0.4953	-0.3813	-0.2897	-0.2226	-0.1755
-1.0000	-0.5098	-0.4736	-0.3934	-0.3099	-0.2426	-0.1925	-0.1553

Tafel 5.1: Traglasten des Standardstabes



**Bild 5.1** Zur Frage der Gültigkeit des Ersatzstabverfahrens

- 2) Die verhältnismäßig großen Abweichungen auf der sicheren Seite lassen die Anwendung aufwendigerer Rechenmethoden - wie z.B. die nach Abschnitt 2 und 3 - aus wirtschaftlichen Erwägungen heraus berechtigt erscheinen.

Die erreichbare Genauigkeit bei Anwendung des "Ersatzstabverfahrens" hängt in hohem Maße von der Genauigkeit der Knicklängenbestimmung ab. Die Knicklänge läßt sich jedoch nur im Falle eines sogenannten "Regelsystems" auf einfache Weise nach vorhandenen Formeln oder mit grafischen Hilfsmitteln (siehe z.B. [10], [31], [45]) bestimmen. Kompliziertere Systeme führen zu einem Eigenwertproblem, dessen Lösung nicht wesentlich einfacher ist als die Durchführung einer Verformungsrechnung z.B. nach Abschnitt 2. Um kompliziertere Knicklängenbestimmungen zu vermeiden, werden in der Bauingenieurpraxis teilweise Hilfsmittel auch in einem Bereich verwendet, wo sie nicht gültig sind. Dies ist eine erhebliche Fehlerquelle bei der Anwendung des Ersatzstabverfahrens. Auf Grund der in beschränkter Anzahl durchgeführter Vergleichsrechnungen läßt sich feststellen, daß das "Ersatzstabverfahren" unter folgenden einschränkenden Bedingungen auf der "sicheren Seite" liegende Ergebnisse liefert:

- 1) Die Bestimmung der Ersatzlängen erfolgt mittels vorgeschätzten, dem zu erwartenden Beanspruchungs-Verformungszustand bei Grenzlast entsprechenden "wirksamen Stabsteifigkeiten". (Vergl. Abschnitt 3.4 Gl. (3.15).)
- 2) Der Einfluß der Verteilung der axialen Kräfte auf die Ersatzlänge - Abweichungen vom Regelsystem - wird berücksichtigt.
- 3) Die in der Bestimmung der Ersatzlänge vorausgesetzten Biegesteifigkeiten der aussteifenden Riegel wird durch ausreichende Bewehrung gesichert.

- 4) Die Größe und Lage der Ersatzausmitte ist ausreichend genau bekannt.

Die Erfüllung der Bedingung 4) bei verschieblichen Stockwerkrahmen ist meist gewährleistet, da die maximale Biegebeanspruchung nach Theorie II. Ordnung am Stielende auftritt.

## 5.2 Nachweis in repräsentativen Teilsystemen

Bei Anwendung des "Ersatzstabverfahrens" zum Nachweis der Stabilität kann die Bestimmung der Ersatzlänge zu einem unangemessen hohen Rechenaufwand führen, der unter Umständen nicht geringer ist als der einer Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung. Es ist nicht möglich, Ersatzlängen für alle praktischen System-Lastanordnungen in Form von expliziten Näherungsausdrücken oder grafischen Darstellungen (Nomogrammen) anzugeben. Die in der Literatur befindlichen Hilfsmittel solcher Art beschränken sich immer auf bestimmte Fälle. (Vergl.[10],[31],[40],[45],[56]).

Eine mögliche Vereinfachung des Stabilitätsnachweises - insbesondere für Entwurfsarbeiten - stellt eine Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung an Ersatzsystemen dar.

Das Verfahren nach Abschnitt 4.3 wendet "wirksame Stabsteifigkeiten" nach Abschnitt 3.4 an, um eine befriedigende Annäherung des Beanspruchungs-Verformungszustandes bei Grenzlast zu erreichen.

Die Näherung des Verfahrens besteht einerseits darin, daß die "wirksamen Stabsteifigkeiten" mit vorgeschätzten Werten in die Rechnung eingehen, andererseits darin, daß nur die zwei, unmittelbar dem zu untersuchenden Stiel benachbarten Knotensteifigkeiten mit zugehörigen Belastungen berücksichtigt werden.

Die Anwendung des Verfahrens ist einfach; die Bemessungsmomente, der Rahmenriegel und die Rahmenstiele nach Theorie II. Ordnung sind direkt bestimmbar ohne Zuhilfenahme elastizitätstheoretischer Knicklängen.

Die Systemstabilität kann mit Hilfe einer so durchgeführten Berechnung näherungsweise beurteilt werden. Systeme mit stark veränderlicher Last-Steifigkeitsverteilung lassen sich jedoch mit ausreichender Genauigkeit nur mit Hilfe einer Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung am Gesamtsystem hinsichtlich ihrer Stabilität beurteilen.

### 5.3 Nachweis am Gesamtsystem

Die Untersuchungen der vorigen Abschnitte zeigten, daß zum Nachweis der Stabilität von Rahmensystemen eine getrennte Dimensionierung der Stiele und Riegel nicht zweckmäßig ist. Es ist vielmehr eine gemeinsame Bemessung anschließender Bauteile auf Grund zugehöriger Last-Verformungszustände anzustreben.

Näherungsverfahren mittels "Ersatzstäben" oder "Ersatzsystemen" sind aus praktischen Gründen zwar für die Handrechnung notwendig, ihre Anwendung ist jedoch auch aus wirtschaftlichen Gründen nicht immer zweckmäßig. Hinzu kommt, daß die Systemstabilität nur dann hinreichend nach dem "Ersatzstabverfahren" nachweisbar ist, wenn zusätzlich die Aufnahme der Verformungsmomente durch die Riegel erwiesen wird. Aus den erläuterten Gründen erscheint der Nachweis der Stabilität des Systems mit Hilfe einer näherungsweise durchzuführenden Verformungsrechnung empfehlenswert. Dabei ist zu bedenken, daß entgegen einer Grenzlasterbestimmung der Nachweis eines einzigen Last-Verformungszustandes unter um den Sicherheitsbeiwert erhöhten Lasten genügt. Bedenkt man, daß komplizierte Rahmensysteme heute schon oft in elektronischen Rechenzentren bearbeitet werden, so bedeutet der Stabilitätsnachweis am Gesamtsystem keine erhebliche Mehrarbeit bei einem Lastfall nach Theorie II. Ordnung und bei Modifizierung der Stabsteifigkeiten.

Der Nachweis am Gesamtsystem kann auch nach noch weitergehenden Näherungsverfahren durchgeführt werden. Ein für die praktische Anwendung sehr geeignetes Verfahren ist das von FEY [20]. Bei Anwendung dieses Verfahrens sollten jedoch errechnete Stabsteifigkeiten - z.B. ähnlich wie in Abschnitt 2.2.4 und 3.4 - angesetzt und keine generelle Steifigkeitsminderung von  $k = 0,5$  vorgenommen werden. (Vergl. Bild 2.10 bis 2.12).

## 6. Zusammenfassung

Das Trag-und Verformungsverhalten ebener Stockwerkrahmen aus Stahlbeton wird unter Kurzzeitbelastung untersucht. Als Methode wurde die Simulation von Rahmenversuchen in einem elektronischen Rechner gewählt.

Zur Durchführung der Untersuchungen wurde ein numerisch-analytisches Näherungsverfahren für die inelastische Verformungsrechnung nach Theorie II. Ordnung entwickelt. Das nicht-lineare Verformungsproblem wurde schrittweise linearisiert und mittels der Deformationsmethode der Elastizitätstheorie gelöst. Die Linearisierung erfolgt durch Einführung von sogenannten "wirksamen Stabsteifigkeiten", die dem jeweiligen Beanspruchungszustand der Stahlbetonstäbe iterativ angepaßt werden. Die "wirksamen Stabsteifigkeiten" werden durch Integration der in diskreten Rechenpunkten computergesteuert bestimmten Momenten-Krümmungswerte ermittelt. Das Rechenverfahren bietet durch die Einfachheit der Verformungsrechnung rechentechnische Vorteile gegenüber rein numerischen Verfahren.

Um zur Klärung des Trag-und Verformungsverhaltens von Stockwerkrahmen beizutragen, wurden systematische Grenzlastuntersuchungen an mehrfach verschieblichen und an unverschieblichen Teilsystemen durchgeführt. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Einfluß der aussteifenden Riegel gewidmet. Die in den Grenzlastberechnungen angewendeten "wirksamen Stabsteifigkeiten" konnten mit Hilfe eines Näherungsansatzes erfaßt werden, der als Hilfsmittel für Verformungsrechnungen nach Theorie II.Ordnung dienen kann.

Die Ergebnisse der Grenzlastberechnungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- 1) Unverschiebliche Stockwerkrahmen sind durch inelastisches Last-Verformungsverhalten und große Schnittkraftumlagerungen gekennzeichnet. Charakteristisch ist für die Schnittkraftverteilung im Traglastzustand, daß die Stabendmomente

an den Knoten durch die inelastischen Verformungen abgebaut werden und die Momente im mittleren Bereich der Stäbe zunehmen. Infolge "Abbau" der planmäßigen Ausmitten gegenläufig gekrümmter Rahmenstiele können z.T. beträchtliche, schlankheitsbedingte Traglaststeigerungen auftreten. Traglastabfall tritt bei solchen Stielen erst bei hohen Stielschlankheiten ein. Näherungsweise kann die Schlankheitsgrenze

$$h/d \leq 20$$

angegeben werden, unterhalb der kein schlankheitsbedingter Traglastabfall zu erwarten ist.

- 2) Verschiebliche Stockwerkrahmen unterscheiden sich von unverschieblichen wesentlich. Stäbe solcher Rahmen erleiden nämlich meist ihre maximale Biegebeanspruchung an den Rahmenknoten. Die Versagensursache des Systems ist entweder die Erschöpfung der Tragkapazität irgendeines Stabes infolge Materialbruchs oder aber Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung. (Vergl. Bild 1.1). Obwohl exakte Abgrenzungen zwischen verschiedenen Versagensursachen allgemein nicht angegeben werden können, ist die Schlankheitsgrenze für verschiebliche, beidseitig inelastisch eingespannte Rahmenstiele näherungsweise

$$h/d > 25$$

als kennzeichnend für den stabilitätsgefährdeten Bereich anzusehen. Liegt in einem Stockwerkrahmen ein Stockwerk oberhalb dieser Grenze, ist meist Stabilitätsversagen infolge seitlichen Ausweichens zu erwarten.

- 3) Bei Rahmensystemen beider Typen kann ein Stabilitätsversagen des Systems nur dann auftreten, wenn die den Beanspruchungs-Verformungszuständen zugeordneten großen Knotenverdrehungen von den aussteifenden Riegeln aufgenommen werden können. Es kommt also der Interaktion der Riegel und Stiele eine besondere Bedeutung zu. Das Tragverhalten der auf Druck beanspruchten Rahmenstiele ist deshalb immer in Verbindung mit dem der aussteifenden



Riegel zu betrachten. Der Zusammenhang zwischen Kenngrößen des Stiels und des Riegels eines idealisierten Rahmenknotens wird angegeben.

- 4) Es werden außerdem einfache, explizite Formeln zur direkten Bemessung der Riegel und Stiele eines Rahmensystems vorgeschlagen, deren Anwendung einer vereinfachten Verformungsrechnung an "Ersatzsystemen" gleichkommt. Durch Anwendung der "wirksamen Stabsteifigkeiten" nach Abschnitt 3.4 ließen sich die Bemessungsmomente nach Theorie II. Ordnung an den Stabenden direkt angeben.
- 5) Die Anwendbarkeit des "Ersatzstabverfahrens" für den Stabilitätsnachweis von Stockwerkrahmen ist überprüft und unter gewissen Einschränkungen bestätigt worden.